پاسخنامه تشریحی

۱ — ۱ **۲** ۳ ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_a^A \ge m \xrightarrow{۰<a<۱} A \le a^m}$

$$\left.\begin{array}{l} \log_{۰/۵}^{\frac{۲x+۳}{۴}} \ge -۱ \to \dfrac{۲x+۳}{۴} \le (۰/۵)^{-۱} \Rightarrow \dfrac{۲x+۳}{۴} \le ۲ \Rightarrow x \le \dfrac{۵}{۲}\quad (I) \\ \text{از طرفی}: \dfrac{۲x+۳}{۴} > ۰ \Rightarrow x > \dfrac{-۳}{۲}\quad (II) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک } II,I} \dfrac{-۳}{۲} < x \le \dfrac{۵}{۲}$$

۲ — ۱ **۲** ۳ ۴

$$۱۲^{۳x-۴} \times ۱۸^{۷-۲x} = ۱۴۵۸ \to (۲^۲ \times ۳)^{۳x-۴} \times (۳^۲ \times ۲)^{۷-۲x} = ۲ \times ۳^۶$$

$$\to (۲^{۶x-۸})(۳^{۳x-۴})(۳^{۱۴-۴x})(۲^{۷-۲x}) = ۲ \times ۳^۶ \to (۲^{۴x-۱})(۳^{۱۰-x}) = ۲ \times ۳^۶$$

$$\to \frac{۲^{۴x-۱}}{۲} = \frac{۳^۶}{۳^{۱۰-x}} \to ۲^{۴x-۲} = ۳^{x-۴} \xrightarrow{۲^a = ۳^b} a = ۴x-۲\,,\ b = x-۴ \to a+b = ۵x-۶$$

۳ — ۱ ۲ **۳** ۴

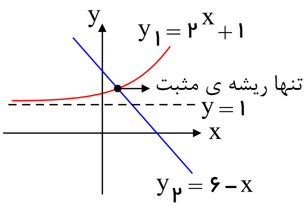
می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a = \frac{۱}{\log_a^k}\ ,\ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a\ ,\ \log_b^N = x \to N = b^x}$

$$\log_۹^x + \log_{x^۳}^۳ = \frac{۵}{۶} \to \log_{۳^۲}^x + \log_{x^۳}^۳ = \frac{۵}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_۳^x + \frac{۱}{۳}\log_x^۳ = \frac{۵}{۶}$$

$$\log_۳^x = t \Rightarrow \frac{۱}{۲}t + \frac{۱}{۳t} = \frac{۵}{۶} \Rightarrow \frac{۳t^۲+۲}{۶t} = \frac{۵}{۶} \Rightarrow ۳t^۲ - ۵t + ۲ = ۰$$

$$a+b+c = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۱ \Rightarrow \log_۳^x = ۱ \Rightarrow x = ۳^۱ = ۳ \\ t = \dfrac{c}{a} = \dfrac{۲}{۳} \Rightarrow \log_۳^x = \dfrac{۲}{۳} \Rightarrow x = ۳^{\frac{۲}{۳}} = \sqrt[۳]{۹} \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} ۳ + \sqrt[۳]{۹}$$

۴ — **۱** ۲ ۳ ۴ کافی است $y_۱ = ۲^x + ۱$, $y_۲ = ۶ - x$ را رسم کنیم و مشاهده کنیم در چند جا همدیگر را قطع می‌کنند.



۵ — **۱** ۲ ۳ ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\left.\begin{array}{l} A = -\log_۳^۴ \Rightarrow \begin{cases} ۳ < ۴ < ۹ \Rightarrow \log_۳^۳ < \log_۳^۴ < \log_۳^۹ \Rightarrow ۱ < \log_۳^۴ < ۲ \\ \Rightarrow -۲ < -\log_۳^۴ < -۱ \Rightarrow -۲ < A < -۱ \end{cases} \\ B = \log_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}^۴ = \log_{۲^{-\frac{۱}{۲}}}^{۲^۲} = \dfrac{۲}{-\frac{۱}{۲}} = -۴ \\ C = \log_۷^۲ \Rightarrow ۷^۰ < ۲ < ۷^۱ \Rightarrow \log_۷^{۷^۰} < \log_۷^۲ < \log_۷^۷ \Rightarrow ۰ < \log_۷^۲ < ۱ \Rightarrow ۰ < C < ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow B < A < C$$

۶ — ۱ ۲ **۳** ۴ برای این‌که تابع $f(x) = (a^۲ + a + k)^x$ به ازای تمام مقادیر حقیقی a یک تابع نمایی باشد، باید داشته باشیم:

همواره $\begin{cases} a^۲ + a + k > ۰ \\ a^۲ + a + k \ne ۱ \end{cases}$

برای این‌که عبارت $a^۲ + a + k$ به ازای هر $a \in \mathbb{R}$، همواره مثبت باشد، کافی است $\Delta < ۰$ باشد (زیرا ضریب $a^۲$ همواره مثبت است)؛ بنابراین باید داشته باشیم:

$$\Delta < ۰ \Rightarrow ۱ - ۴(۱)(k) < ۰ \Rightarrow ۱ - ۴k < ۰ \Rightarrow k > \frac{۱}{۴}\quad (I)$$

برای این‌که عبارت $a^۲ + a + k$ همواره مخالف ۱ باشد، باید داشته باشیم:

$a^{۲}+a+k\neq ۱ \Rightarrow a^{۲}+a+k-۱\neq ۰ \Rightarrow \Delta<۰ \Rightarrow ۱-۴(k-۱)<۰ \Rightarrow ۱-۴k+۴<۰ \Rightarrow ۴k>۵ \Rightarrow k>\frac{۵}{۴}\quad (II)$

$(I),(II)\xrightarrow{\text{اشتراک}} k>\frac{۵}{۴}$

۷ ۴ ۳ ۲ ۱

$\log_{۵}^{x}\times\log_{۶}^{x}\times\log_{۷}^{x}=\log_{۵}^{x}\times\log_{۶}^{x}+\log_{۶}^{x}\times\log_{۷}^{x}\Rightarrow \frac{\log x}{\log ۵}\times\frac{\log x}{\log ۶}\times\frac{\log x}{\log ۷}=\frac{\log x}{\log ۵}\times\frac{\log x}{\log ۶}+\frac{\log x}{\log ۶}\times\frac{\log x}{\log ۷}\Rightarrow\frac{(\log x)^{۳}}{\log ۵\log ۶\log ۷}=\frac{(\log x)^{۲}}{\log ۵\log ۶}$
$+\frac{(\log x)^{۲}}{\log ۶\log ۷}\xrightarrow[\text{خواهیم داشت}]{\text{با دقت در صورت کسرها}}(\log x)^{۲}=۰\Rightarrow\log x=۰\Rightarrow x=۱$

بنابراین یکی از ریشه‌های معادله برابر $x=۱$ است. حال با تقسیم طرفین معادله بر $(\log x)^{۲}$ خواهیم داشت.

$\frac{\log x}{\log ۵\log ۶\log ۷}=\frac{۱}{\log ۵\log ۶}+\frac{۱}{\log ۶\log ۷}\Rightarrow\frac{\log x}{\log ۵\log ۶\log ۷}=\frac{\log ۷+\log ۵}{\log ۵\log ۶\log ۷}\Rightarrow\log x=\log ۷+\log ۵\Rightarrow\log x=\log ۳۵\Rightarrow x=۳۵$

۸ ۴ ۳ ۲ ۱

$(\sqrt{۲}-۱)^{۲x}+(۳+۲\sqrt{۲})^{x}=۳۴\Rightarrow((\sqrt{۲}-۱)^{۲})^{x}+(۳+۲\sqrt{۲})^{x}=۳۴\Rightarrow(۳-۲\sqrt{۲})^{x}+(۳+۲\sqrt{۲})^{x}=۳۴$

توجه شود که $۳-۲\sqrt{۲}=\frac{۱}{۳+۲\sqrt{۲}}$ زیرا $(۳-۲\sqrt{۲})(۳+۲\sqrt{۲})=۱$؛ بنابراین اگر فرض کنیم $(۳-۲\sqrt{۲})^{x}=t$ آن‌گاه $(۳+۲\sqrt{۲})^{x}=\frac{۱}{t}$ خواهد بود و خواهیم داشت:

$t+\frac{۱}{t}=۳۴\Rightarrow\frac{t^{۲}+۱}{t}=۳۴\Rightarrow t^{۲}-۳۴t+۱=۰\Rightarrow t=\frac{۳۴\pm ۲\sqrt{۲۸۸}}{۲}=۱۷\pm ۱۲\sqrt{۲}$

حال توجه شود که $۱۷+۱۲\sqrt{۲}=(۳+۲\sqrt{۲})^{۲}$ و $۱۷-۱۲\sqrt{۲}=(۳-۲\sqrt{۲})^{۲}$ بنابراین خواهیم داشت:

$t=۱۷-۱۲\sqrt{۲}\Rightarrow(۳-۲\sqrt{۲})^{x}=۱۷-۱۲\sqrt{۲}\Rightarrow(۳-۲\sqrt{۲})^{x}=(۳-۲\sqrt{۲})^{۲}\Rightarrow x=۲$

$t=۱۷+۱۲\sqrt{۲}\Rightarrow(۳-۲\sqrt{۲})^{x}=۱۷+۱۲\sqrt{۲}\Rightarrow(۳-۲\sqrt{۲})^{x}=(۳+۲\sqrt{۲})^{۲}=(۳-۲\sqrt{۲})^{-۲}\Rightarrow x=-۲$

یعنی ریشه‌های معادلهٔ اصلی برابر $x=۲$ و $x=-۲$ و حاصل‌ضرب آن‌ها -۴ است.

۹ ۴ ۳ ۲ ۱

$۹^{x}-۵\times ۶^{x}+۶\times ۴^{x}=۰\xrightarrow[\text{تقسیم } ۴^{x}]{\text{طرفین بر}}\frac{۹^{x}}{۴^{x}}-۵\times\frac{۶^{x}}{۴^{x}}+۶=۰\Rightarrow(\frac{۹}{۴})^{x}-۵\times(\frac{۶}{۴})^{x}+۶=۰\Rightarrow(\frac{۳}{۲})^{۲x}-۵\times(\frac{۳}{۲})^{x}+۶=۰\Rightarrow$ فرض : $(\frac{۳}{۲})^{x}=t$

$\Rightarrow t^{۲}-۵t+۶=۰\Rightarrow(t-۲)(t-۳)=۰\Rightarrow t-۲=۰\Rightarrow t=۲$

$t-۳=۰\Rightarrow t=۳\Rightarrow(\frac{۳}{۲})^{x}=۲\Rightarrow x_{۱}=\log_{\frac{۳}{۲}}^{۲},(\frac{۳}{۲})^{x}=۳\Rightarrow x_{۲}=\log_{\frac{۳}{۲}}^{۳}$

بنابراین معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است که یکی از ریشه‌ها از ۲ کوچک‌تر و دیگری از ۲ بزرگ‌تر است، زیرا:

$\frac{۳}{۲}<۲<\frac{۹}{۴}\Rightarrow\log_{\frac{۳}{۲}}^{\frac{۳}{۲}}<\log_{\frac{۳}{۲}}^{۲}<\log_{\frac{۳}{۲}}^{\frac{۹}{۴}}\Rightarrow ۱<\log_{\frac{۳}{۲}}^{۲}<۲\Rightarrow ۱<x_{۱}<۲$

$\frac{۹}{۴}<۳<\frac{۲۷}{۸}\Rightarrow\log_{\frac{۳}{۲}}^{\frac{۹}{۴}}<\log_{\frac{۳}{۲}}^{۳}<\log_{\frac{۳}{۲}}^{\frac{۲۷}{۸}}\Rightarrow ۲<\log_{\frac{۳}{۲}}^{۳}<۳\Rightarrow ۲<x_{۲}<۳$

۱۰ ۴ ۳ ۲ ۱ می‌دانیم اگر $K>۱$، آن‌گاه از $\log_{k}^{a}<\log_{k}^{b}$ نتیجه می‌شود $a<b$

بنابراین:

$\log_{۴}^{(۱+x)}<\log_{۴}^{(-x)}-۱\Rightarrow\log_{۴}^{(۱+x)}-\log_{۴}^{(-x)}<-۱\Rightarrow\log_{۴}^{(-\frac{۱+x}{x})}<\log_{۴}^{\frac{۱}{۴}}\Rightarrow-\frac{۱+x}{x}<\frac{۱}{۴}\quad(*)$

از طرف دیگر باید $-x>۰$ و $۱+x>۰$ تا نامعادله معنی‌دار باشد. یعنی $-۱<x<۰$. (I)

پس از $(*)$ نتیجه می‌شود:

$\frac{۱+x}{x}>-\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۴(۱+x)<-x\Rightarrow ۴+۴x<-x\Rightarrow ۵x<-۴\Rightarrow x<-\frac{۴}{۵}\quad(II)$

از (I) و (II) نتیجه می‌شود $-۱<x<-\frac{۴}{۵}$، پس $(a,b)=(-۱,-\frac{۴}{۵})$ و درنتیجه $b-a=\frac{۱}{۵}$.

۱۱ ۴ ۳ ۲ ۱ با توجه به ویژگی‌های لگاریتم داریم:

$\underbrace{(\log_{۱۲}^{۴})^{۲}}_{a^{۲}}+\underbrace{(\overbrace{\log_{۱۲}^{۳}}^{b}+\overbrace{\log_{۱۲}^{۹}}^{c})}_{\log_{۱۲}^{۲۷}}\underbrace{(\log_{۱۲}^{۴})}_{a}+\underbrace{(\log_{۱۲}^{۳})}_{b}\underbrace{(\log_{۱۲}^{۹})}_{c}$

$=a^{۲}+(b+c)a+bc=(a+b)(a+c)$

$$= (\log_{۱۲}^{۴}+\log_{۱۲}^{۳})(\log_{۱۲}^{۴}+\log_{۱۲}^{۹}) = (\log_{۱۲}^{۱۲})(\log_{۱۲}^{۳۶}) = \log_{۱۲}^{۳۶}$$

$$\rightarrow \frac{\log_{۱۲}^{۳۶}}{\log_{۱۲}^{۶}} = \log_{۶}^{۳۶} = ۲$$

۱۲ ۴ ۳ **۲** ۱

$$y = (\sqrt{x})^{۳} + ۳(\sqrt{x})^{۲} + ۳\sqrt{x} + ۱ - ۱ = (\sqrt{x}+۱)^{۳} - ۱ \rightarrow y+۱ = (\sqrt{x}+۱)^{۳} \rightarrow \sqrt[۳]{y+۱} = \sqrt{x}+۱ \rightarrow \sqrt{x} = \sqrt[۳]{y+۱} - ۱ \rightarrow x = (\sqrt[۳]{y+۱}-۱)^{۲}$$

$$b = ۳\,,\ a = ۱\,,\ c = -۱ \xrightarrow{+} a+b+c = ۳$$

۱۳ ۴ **۳** ۲ ۱ برای توابع وارون‌پذیر f و g داریم: $(gof)^{-۱} = f^{-۱}og^{-۱}$ و $(fog)^{-۱} = g^{-۱}of^{-۱}$.

با توجه به راهنمای فوق داریم $(f^{-۱}og)^{-۱} = g^{-۱}of$ ، پس تابع وارون تابع $f^{-۱}og$ را می‌یابیم.

$$(f^{-۱}og)(x) = \frac{\sqrt[۵]{۴x^{۳}-۱}}{۲} = y \Rightarrow \sqrt[۵]{۴x^{۳}-۱} = ۲y \Rightarrow ۴x^{۳}-۱ = ۳۲y^{۵}$$

$$\Rightarrow x^{۳} = \frac{۳۲y^{۵}+۱}{۴} = ۸y^{۵} + \frac{۱}{۴} \Rightarrow x = \sqrt[۳]{۸y^{۵}+\frac{۱}{۴}} \Rightarrow y = \sqrt[۳]{۸x^{۵}+\frac{۱}{۴}}$$

$$\Rightarrow (g^{-۱}of)(x) = \sqrt[۳]{۸x^{۵}+\frac{۱}{۴}}$$

حال داریم:

$$a = ۸, b = \frac{۱}{۴}, n = ۳, m = ۵ \Rightarrow ab + mn = ۸ \times \frac{۱}{۴} + ۵ \times ۳ = ۱۷$$

۱۴ ۴ ۳ **۲** ۱

ابتدا دامنهٔ توابع $f(x)$ و $g(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = \sqrt{-x^{۲}-۲x} \rightarrow D_f : -x^{۲}-۲x \geq ۰ \xrightarrow{\times(-۱)} x^{۲}+۲x \leq ۰ \xrightarrow[x=-۲]{x=۰} D_f = [-۲, ۰]$$

$-x$	$-\infty$		-۲		۰		$+\infty$
$x^{۲}+۲x$		+	۰	$\underbrace{-}$	۰	+	

$$\rightarrow D_f = [-۲, ۰]$$

$g(x) = \dfrac{-۲x^{۲}-۱}{x^{۲}-x} \rightarrow x^{۲}-x = ۰ \rightarrow x = ۰$ و $x = ۱$ ریشه‌های مخرج

$$\rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{۰, ۱\}$$

حالا با توجه به تعریف دامنهٔ تابع $fog(x)$ داریم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{۰,۱\} \,|\, \frac{-۲x^{۲}-۱}{x^{۲}-x} \in [-۲, ۰]\right\}$$

$$\frac{-۲x^{۲}-۱}{x^{۲}-x} \geq -۲ \xrightarrow{\times(-۱)} \frac{۲x^{۲}+۱}{x^{۲}-x} \leq ۲ \rightarrow \frac{۲x^{۲}+۱}{x^{۲}-x} - ۲ \leq ۰ \rightarrow \frac{۲x^{۲}+۱-۲x^{۲}+۲x}{x^{۲}-x} \leq ۰$$

$$\rightarrow \frac{۱+۲x}{x^{۲}-x} \leq ۰ \rightarrow$$

x		$-\frac{۱}{۲}$		۰		۱	
$\frac{۱+۲x}{x^{۲}-x}$	$\underbrace{-}$	۰	+	‖	$\underbrace{-}$	‖	+

$$\rightarrow (-\infty, \frac{-۱}{۲}] \cup (۰, ۱) \quad \boxed{I}$$

$$\frac{-۲x^{۲}-۱}{x^{۲}-x} \leq ۰ \xrightarrow{\times(-۱)} \frac{۲x^{۲}+۱}{x^{۲}-x} \geq ۰ \xrightarrow{۲x^{۲}+۱>۰}$$

$$x^{۲}-x > ۰ \rightarrow x \in \underbrace{(-\infty, ۰) \cup (۱, \infty)}_{\boxed{II}}$$

از اشتراک مجموعه جواب I و II و D داریم:

$$((-\infty, \frac{-۱}{۲}] \cup (۰, ۱)) \cap ((-\infty, ۰) \cup (۱, \infty))(\mathbb{R} - \{۰, ۱\}) = (-\infty, -\frac{۱}{۲}]$$

۱۵ **۴** ۳ ۲ ۱ ابتدا ضابطه و دامنهٔ تابع fog را به‌دست می‌آوریم.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = g^{۲}(x) - ۴g(x) = (g(x)-۲)^{۲} - ۴$$

$$= (\sqrt{x+۲}+۲-۲)^{۲} - ۴ = x+۲-۴ = x-۲$$

$$D_{fog} = \{x | x \in D_g\,,\ g(x) \in D_f\} = \left\{x | x \geq -۲\,,\ \sqrt{x+۲}+۲ \in \mathbb{R}\right\} = [-۲, +\infty)$$

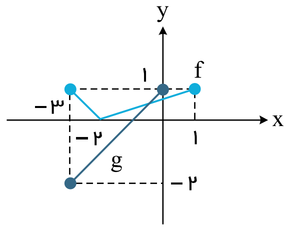
بنابراین:

$$x \geq -2 \Rightarrow x-2 \geq -4 \Rightarrow (fog)(x) \geq -4$$

درنتیجه:

$$R_{fog} = [-4, +\infty)$$

۱۶ ‏ ۱ ۲ ۳ **۴**



می‌دانیم:

$$D_{fog} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

از آنجایی که در این سؤال:

$$D_f = [-3, 1], D_g = [-3, 0], g(x) \in [-2, 1]$$

داریم $D_{fog} = [-3, 0]$.

پس گزینهٔ (۳) غلط است. از طرفی دیگر داریم:

$$g(-3) = -2, f(-2) = 0 \Rightarrow (fog)(-3) = 0$$

و همچنین:

$$g(0) = 1\ ,\ f(1) = 1 \Rightarrow (fog)(0) = 1$$

بنابراین فقط گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۷ ‏ **۱** ۲ ۳ ۴

ضابطهٔ تابع $y = gof(x)$ را تشکیل می‌دهیم و سپس بررسی می‌کنیم:

$$gof(x) = \sqrt{(m+2)x^2 - 2mx + 1} - 2$$

چون دامنه‌ی gof، $\mathbb{R}$ است پس عبارت زیر رادیکال همواره نامنفی است بنابراین:

$$\begin{cases} a > 0 \to m+2 > 0 \to m > -2 \quad (1) \\ \Delta \leq 0 \to 4m^2 - 4m - 8 \leq 0 \to 4(m-2)(m+1) \leq 0 \to -1 \leq m \leq 2 \quad (2) \end{cases} \qquad \Rightarrow -1 \leq m \leq 2$$

شرط آنکه یک عبارت درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$، همواره بزرگتر مساوی صفر باشد آن است که $a > 0$ و $\Delta \leq 0$ باشد.

۱۸ ‏ ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم: $\log_c^a - \log_c^b = \log_c^{\frac{a}{b}}$

بنابراین:

$$[\log_2^5 - \log_2^8] + [\log_2^{5^{-1}}] + [\log_2^{128} - \log_2^7]$$

از طرفی می‌دانیم: $\log_b^{a^n} = n \log_b^a$

$$[\log_2^5 - \log_2^8] + [\log_2^{5^{-1}}] + [\log_2^{128} - \log_2^7] = [\log_2^5 - 3\log_2^2] + [\log_2^{5^{-1}}] + [7\log_2^2 - \log_2^7] = [\log_2^5] - 3 + [-\log_2^5] + 7 + [-\log_2^7]$$
$$= 4 + [\log_2^5] + [-\log_2^5] + [-\log_2^7] :$$

می‌دانیم: $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in z \\ -1 & x \notin z \end{cases}$ بنابراین $[\log_2^5] + [-\log_2^5] = -1$ چون $\log_2^5 \notin z$

$$4 + [\log_2^5] + [-\log_2^5] + [-\log_2^7] = 3 + [-\log_2^7] = 3 + (-3) = 0$$
$$2^2 < 7 < 2^3 \to 2 < \log_2^7 < 3 \Rightarrow -3 < -\log_2^7 < -2 \Rightarrow [-\log_2^7] = -3$$

۱۹ ‏ ۱ **۲** ۳ ۴ ‏ ابتدا توابع $f - 2g$ و fog را تشکیل می‌دهیم:

$$f = \{\ (4, 2), (3, 7), (-1, 1)\ \}$$

$$g = \{\ (3, 4), (4, -1), (-2, 3)\ \} \to 2g = \{\ (3, 8), (4, -2), (-2, 6)\ \}$$
$$f - 2g = \{\ (4, 2-(-2)), (3, 7-8)\ \} = \{\ (4, 4), (3, -1)\ \}$$

دامنهٔ fog زیرمجموعهٔ دامنهٔ g است، پس:

$$\left.\begin{array}{l}(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۴)=۲\\(fog)(۴)=f(g(۴))=f(-۱)=۱\\(fog)(-۲)=f(g(-۲))=f(۳)=۷\end{array}\right\}\Rightarrow fog=\{(۳,۲),(۴,۱),(-۲,۷)\}$$

$$\frac{f-۲g}{fog}=\left\{(۴,\frac{۴}{۱}),(۳,\frac{-۱}{۲})\right\}=\left\{(۴,۴),(۳,-\frac{۱}{۲})\right\}$$

حاصل جمع اعضای برد $=۴-\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۲}=۳/۵$

۲۰ ۴ ۳ **۲** ۱ راهنمایی: فرض کنید $\log x = k$ است.

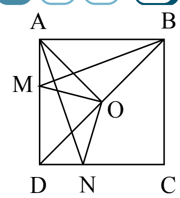
اول: $\log x = k$ را در نظر می‌گیریم: $\log x = k \Rightarrow x = ۱۰^k$

دوم: $x = ۱۰^k$ را در معادله جایگزین می‌کنیم.

$$\begin{cases}k=-۳\Rightarrow x=۱۰^k=\frac{۱}{۱۰۰۰}\\k=۲\Rightarrow x=۱۰^k=۱۰۰\end{cases}\quad x^{۱+\log x}=۱۰^۶\Rightarrow(۱۰^k)^{۱+k}=۱۰^۶\Rightarrow ۱۰^{k^۲+k}=۱۰^۶\Rightarrow k^۲+k=۶\Rightarrow k^۲+k-۶=۰\Rightarrow(k+۳)(k-۲)=۰$$

سوم: پس حاصل‌ضرب ریشه‌ها $۰/۱$ است.

۲۱ ۴ ۳ **۲** ۱ فرض کنیم O مرکز مربع $ABCD$ باشد. با توجه به این که در هر مربع قطرها نیمساز زوایای نظیرشان هستند، داریم:



$$\left.\begin{array}{l}OA=OD\\AM=DN\\O\hat{A}M=O\hat{D}N=۴۵^\circ\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ض ز ض)}}\overset{\Delta}{OAM}\cong\overset{\Delta}{ODN}\Rightarrow\begin{cases}OM=ON\\M\hat{O}N=۹۰^\circ\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}OA=OB\\A\hat{O}B=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow B\xrightarrow[\text{به مرکز } O]{\text{تحت دوران ۹۰ درجه}}A\\[2ex]\left.\begin{array}{l}OA=OD\\A\hat{O}D=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow A\xrightarrow[\text{به مرکز } O]{\text{تحت دوران ۹۰ درجه}}D\\[2ex]\left.\begin{array}{l}OM=ON\\M\hat{O}N=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow M\xrightarrow[\text{به مرکز } O]{\text{تحت دوران ۹۰ درجه}}N\end{array}\right\}\Rightarrow\overset{\Delta}{BAM}\xrightarrow[\text{به مرکز } O]{\text{تحت دوران ۹۰ درجه}}\overset{\Delta}{ADN}$$

۲۲ ۴ ۳ ۲ **۱** دوران حول مبدأ و به زاویهٔ $\frac{۳\pi}{۲}$:

$$(x,y)\xrightarrow{\alpha=\frac{۳\pi}{۲}}(y,-x)$$

تصویر مرکز دایره $O(-۲,۳)\to O'(۳,۲)$ مرکز دایره

همچنین در دوران که یک تبدیل ایزومتریست، شعاع دایره و تصویر یکسان است. پس:

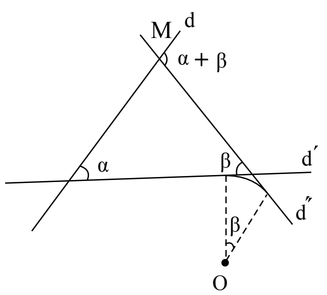
$$R'=R=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow OO'=\sqrt{(۳-(-۲))^۲+(۳-۲)^۲}=\sqrt{۲۵+۱}=\sqrt{۲۶}$$

مماس مشترک داخلی $TT'=\sqrt{OO'^۲-(R+R')^۲}=\sqrt{۲۶-(\frac{۵}{۲}+\frac{۵}{۲})^۲}=\sqrt{۲۶-۲۵}=۱$

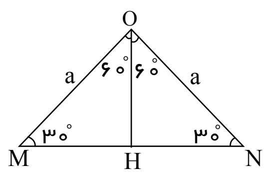
۲۳ ۴ ۳ **۲** ۱

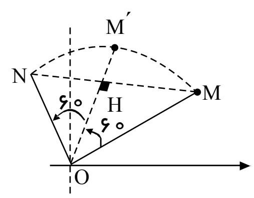
مطابق شکل زاویهٔ بین d و d'، α می‌باشد. به مرکز O خط d' را تحت زاویهٔ β دوران می‌دهیم. می‌دانیم که زاویه بین d' و d''، β خواهد بود. پس زاویهٔ M بین d و d'' برابر است با: $\alpha+\beta$.



۲۴ ۴ ۳ **۲** ۱

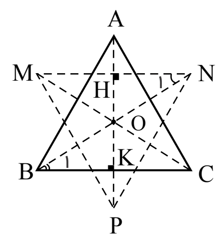
مطابق شکل داریم:





$$OH=\frac{a}{۲}, HN=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a, MH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a \Rightarrow MN=\sqrt{۳}a$$

۲۵ ۱ ۲ ۳ **۴** مطابق شکل چون داریم: $AP\perp BC$ و $MN \parallel BC$، پس $AP\perp MN$ است. اگر H پای عمود باشد داریم که:



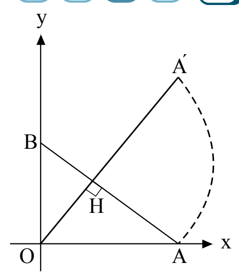
$$\begin{cases} H\hat{O}N=B\hat{O}K \\ \hat{B}_۱=\hat{N}_۱=۳۰^\circ \end{cases} \Rightarrow BO=ON=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\times\frac{۲}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}a$$

$$HN=BK=\frac{BC}{۲}$$

با توجه به شکل می‌بینیم که رأس C تحت زاویه $N\hat{O}C=۶۰^\circ$ و شعاع $OC=ON=\frac{\sqrt{۳}}{۳}a$ به N تبدیل می‌شود. به همین ترتیب A به M و B به P تبدیل می‌شود.

همچنین می‌توان نقطهٔ C را تحت زاویه ۱۸۰° و به مرکز O (چون $OC=OM=\frac{\sqrt{۳}}{۳}a$) دوران داد تا M را به دست آوریم. به همین ترتیب نقطه B به N و نقطه A به P تبدیل می‌شود.

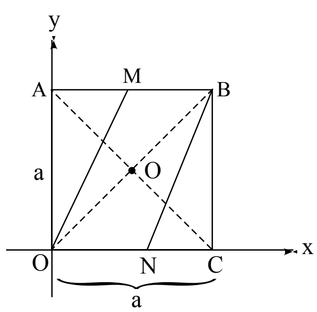
۲۶ ۴ **۳** ۲ ۱ مطابق شکل اگر A' دوران یافته A تحت زاویه $H\hat{O}A$ به مرکز O باشد، چون طبق فرض مسأله $OA'\perp AB$ است داریم:



$$\begin{cases} H\hat{O}A+H\hat{A}O=۹۰^\circ \\ B+H\hat{A}O=۹۰^\circ \\ O=۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow H\hat{O}A=\hat{B}$$

۲۷ ۴ ۳ ۲ **۱**

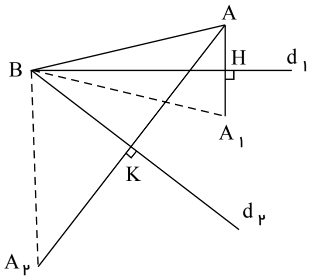
مطابق شکل می‌توان مثلث OAM را با تقارن مرکزی به مرکزیت نقطهٔ O به مثلث BNC تبدیل کرد. بنابراین برای ضابطه تبدیل داریم:



$$O \Big| \begin{matrix} \frac{a}{۲} \\ \frac{a}{۲} \end{matrix} \text{ مختصات } \quad (x,y) \xrightarrow{\text{تقارن مرکزی به مرکز } O\big|\begin{smallmatrix}\frac{a}{۲}\\ \frac{a}{۲}\end{smallmatrix}} (a-x, a-y)$$

۲۸ ۱ ۲ ۳ ۴

مطابق شکل $d_۱$ و $d_۲$ محورهای بازتاب هستند. $A_۱$ بازتاب A تحت محور $d_۱$ و $A_۲$ بازتاب A تحت محور $d_۲$ هستند.



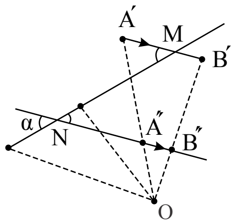
بنابراین داریم: $BA = BA_۱ = BA_۲$

از آنجا که BA ثابت است و نقطهٔ B هم ثابت است، پس مکان نقاط $A_۱$ و $A_۲$ و ... دایره‌ای به مرکز B و شعاع BA است.

مطابق شکل رئوس K و H زوایای قائمه‌ای رو به ضلع ثابت AB هستند. بنابراین شکل حاصل از جابجایی این نقاط (که اواسط اضلاع $AA_۱$ و $AA_۲$ هستند)، دایره‌ای به قطر AB و مرکز وسط AB است.

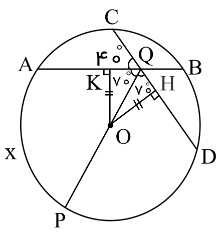
۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم که زاویهٔ بین خط و دوران یافته آن برابر با زاویهٔ دوران است. داریم:

$$\hat{M}_۱ = ۴۵^\circ , A''B'' \parallel A'B'$$
$$\Rightarrow M\hat{N}A'' = \hat{M}_۱ , M\hat{N}A'' = \alpha$$
$$\Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$



۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴

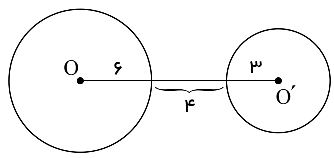
می‌دانیم که دوران طولپا است پس $AB = CD$ و O مرکز دوران است پس: $OH = OK$



$$OH = OK \Rightarrow O\hat{Q}A = O\hat{Q}D = \frac{۱۸۰ - ۴۰}{۲} = ۷۰^\circ$$

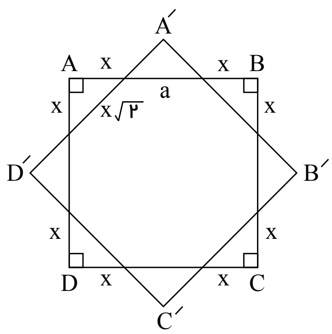
۳۱ ۱ ۲ ۳ ۴ بردار انتقالی که دو دایره را به صورت هم‌مرکز می‌کند همان OO' است که:

$$OO' = ۳ + ۶ + ۴ = ۱۳$$



۳۲ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر مطابق شکل مربع $ABCD$ را حول مرکز تقارن آن به اندازهٔ ۴۵° دوران دهیم، مربع $A'B'C'D'$ تشکیل می‌شود و سطح محصور بین این دو مربع، یک هشت ضلعی منتظم است. فرض می‌کنیم ضلع هشت ضلعی منتظم a باشد، بنابراین داریم:



$$\begin{cases} \text{طول ضلع مربع} = ۲x + a \\ a = x\sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow \text{طول ضلع مربع} = ۲x + x\sqrt{۲} = ۴ + ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow S_{\text{۸ ضلعی}} = S_{ABCD} - ۴ S_{\triangle \text{قائم‌الزاویه}} \Rightarrow S_{\text{۸ ضلعی}} = (۴ + ۲\sqrt{۲})^۲ - ۴ \times \frac{۱}{۲} x^۲$$
$$\xrightarrow{x=۲} S_{\text{۸ ضلعی}} = ۱۶ + ۱۶\sqrt{۲}$$

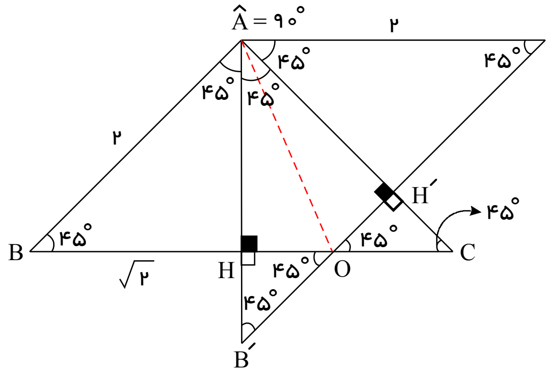
(۳۳) ۱ ۲ ۳ ۴ طبق فرض مسئله $OO' = ۱۳$ و $R = \frac{۱۷}{۲}$ و $R' = \frac{۷}{۲}$. بنابراین طول مماس مشترک‌های خارجی و داخلی به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} \text{خارجی}\,TT' = \sqrt{OO'^۲ - (R-R')^۲} = \sqrt{۱۶۹ - ۲۵} = ۱۲ \\ \text{داخلی}\,TT' = \sqrt{OO'^۲ - (R+R')^۲} = \sqrt{۱۶۹ - ۱۴۴} = ۵ \end{cases} \xrightarrow{\times} \text{جواب} = ۶۰$$

(۳۴) ۱ ۲ ۳ ۴ مثلث ABC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین بوده و $AB = AC = ۲$، بنابراین داریم:

$$BC = \sqrt{۲}AB = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow BH = \frac{BC}{۲} = \sqrt{۲}$$

از آن‌جا که دوران تبدیلی طولپاست، داریم:



$$\begin{cases} AB' = AB = AC = AC' = ۲ \\ B'C' = BC \Rightarrow B'H' = BH = CH = C'H' = \sqrt{۲} \\ AH' = AH = \sqrt{AB^۲ - BH^۲} = \sqrt{۴ - ۲} = \sqrt{۲} \quad (۱) \end{cases}$$

$$\Rightarrow OH = B'H = AB' - AH = ۲ - \sqrt{۲} \Rightarrow OH = ۲ - \sqrt{۲} \quad (۲)$$

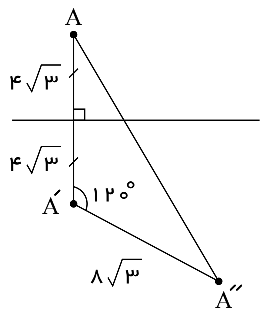
اگر A را به O وصل کنیم دو مثلث $AH'O$ و AHO بنابر وتر و یک ضلع قائمه هم‌نهشت بوده و درنتیجه: $OH' = OH$.

$$\Rightarrow A'B'C' \text{ و تصویرش } ABC \text{ سطح محصور بین مثلث} = S_{AHOH'} = ۲S_{\overset{\Delta}{AHO}} = ۲ \times \frac{۱}{۲}AH \cdot OH \xlongequal{\text{طبق } (۱),(۲)} \sqrt{۲}(۲ - \sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲} - ۲$$

(۳۵) ۱ ۲ ۳ ۴ روش اول: نقطهٔ A' بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d بوده و نقطهٔ A'' دوران یافتهٔ نقطهٔ A نسبت به مرکز دوران A' و به اندازهٔ ۱۲۰° در جهت ساعتگرد است. کافی است رابطهٔ کسینوس‌ها را در مثلث $AA'A''$ بنویسیم.

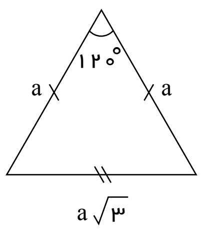
$$AA''^۲ = AA'^۲ + A'A''^۲ - ۲AA' \cdot A'A'' \cdot \cos ۱۲۰^\circ \Rightarrow AA''^۲ = (۸\sqrt{۳})^۲ + (۸\sqrt{۳})^۲ - ۲ \times ۸\sqrt{۳} \times ۸\sqrt{۳} \times (-\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow AA''^۲ = ۱۹۲ + ۱۹۲ + ۱۹۲ = ۵۷۶ \Rightarrow AA'' = ۲۴$$



روش دوم: مطابق شکل مقابل در مثلث متساوی‌الساقین به ساق a و زاویهٔ رأس ۱۲۰°، قاعده برابر است با $a\sqrt{۳}$.

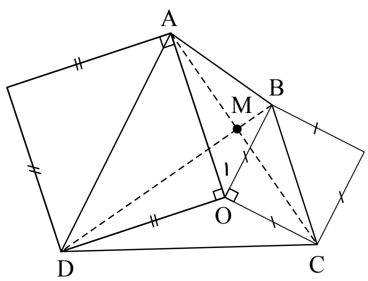
در اینجا $a = ۸\sqrt{۳}$ پس جواب برابر است با: $a\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳} \times \sqrt{۳} = ۲۴$



(۳۶) ۱ ۲ ۳ ۴ دو مثلث AOC و BOD بنابر (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند زیرا:

$$\begin{cases} A\hat{O}C = B\hat{O}D = ۹۰^\circ + \hat{O}_۱ \\ OA = OD \\ OB = OC \end{cases} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} AC = BD \quad (۱)$$

$$\text{مرکز دوران } O \begin{cases} D \xrightarrow[\text{ساعتگرد}]{\text{دوران } ۹۰^\circ} A \\ B \xrightarrow[\text{ساعتگرد}]{\text{دوران } ۹۰^\circ} C \end{cases} \Rightarrow BD \xrightarrow[\text{ساعتگرد}]{\text{دوران } ۹۰^\circ} AC$$



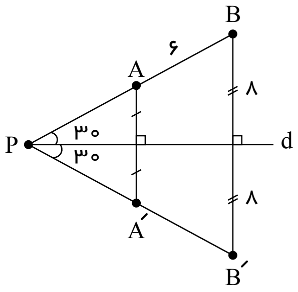
از آن‌جا زاویهٔ دوران برابر زاویهٔ بین دو خط دوران یافته است، نتیجه می‌شود: $A\hat{M}D = ۹۰^\circ \quad (۲)$.

بنابراین طبق (۱) و (۲) گزینهٔ (۴) صحیح است.

(۳۷) ۱ ۲ ۳ ۴ چون بازتاب طولپاست بنابراین:

$$PB = PB' \xrightarrow{\hat{P}=۶۰^\circ} PB = PB' = BB' = ۱۶$$

(مثلث PBB' متساوی‌الاضلاع است.)



$$\to PA = ۱۰ \to \frac{PA}{PB'} = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸}$$

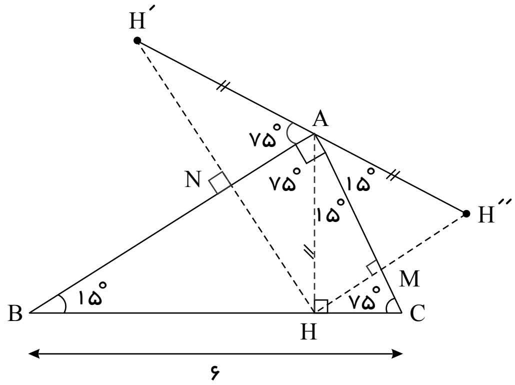
(۳۸) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\hat{A} = ۹۰^\circ \;,\; \hat{B} = ۱۵^\circ \;\to\; \hat{C} = ۷۵^\circ$$

AB بازتاب H نسبت به $H' \to AH = AH'$

AC بازتاب H نسبت به $H'' \to AH = AH''$

$\Big\} \to AH' = AH''$



نکته: در مثلث قائم‌الزاویه که یک زاویهٔ آن ۱۵° باشد، ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ است.

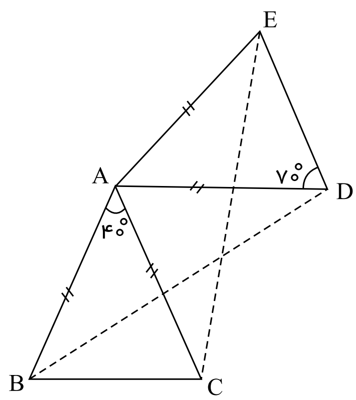
$$\to H'H'' = ۲AH \xrightarrow{AH=\frac{۱}{۴}BC} H'H'' = ۲(\frac{۱}{۴} \times ۶) = ۳$$

(۳۹) ۱ ۲ ۳ ۴ دو مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{ADE}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ هم‌نهشت هستند.

پس اگر دورانی به مرکز A و زاویهٔ ۴۰° در نظر بگیریم داریم:

$$B\hat{A}C = ۴۰^\circ \Rightarrow A\hat{B}C = A\hat{C}B = ۷۰^\circ$$

$$A\hat{D}E = A\hat{E}D = ۷۰^\circ \Rightarrow D\hat{A}E = ۴۰^\circ$$



$R(BD) = CE \Rightarrow R(D) = E$ و $R(B) = C$

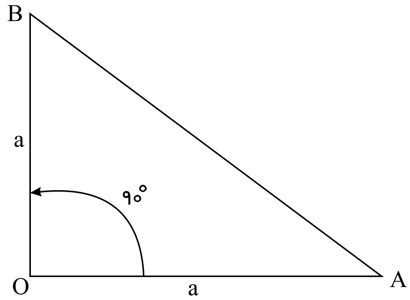
یعنی پاره خط BD با دوران ۴۰° حول نقطه A روی CE تصویر می‌شود و زاویه بین BD و CE برابر ۴۰° است.

(۴۰) ۱ ۲ ۳ ۴ ترکیب ۴ دوران به مرکز O و زاویهٔ θ یک دوران ۶۰° است پس $\theta = ۱۵^\circ$.

حال اگر ۶ بار دوران ۱۵° انجام دهیم به یک دوران ۹۰° می‌رسیم.

$OA = OB = a \Rightarrow AB = a\sqrt{2}$

$\dfrac{AB}{AA'} = \dfrac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$



۴۱ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\frac{P(A\cup B)}{4} = \frac{P(A')}{2} = \frac{P(B')}{3} = P(A\cap B) = t$$

$P(A\cup B) = 4t$

$P(A') = 2t \rightarrow P(A) = 1 - 2t$

$P(B') = 3t \rightarrow P(B) = 1 - 3t$

$P(A\cap B) = t$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$\rightarrow 4t = 1 - 2t + 1 - 3t - t \rightarrow 10t = 2 \rightarrow t = \dfrac{1}{5}$

$P(A) = 1 - 2(\dfrac{1}{5}) = \dfrac{3}{5}$

۴۲ **۱** ۲ ۳ ۴

$n(S) = 6^3 = 216$

حالات مطلوب به صورت زیر هستند:

اجباری	۱,۲,۳,۴,۵	۱
اجباری	۱,۲,۳,۴	۲
اجباری	۱,۲,۳	۳
اجباری	۱,۲	۴
اجباری	۱	۵

$$\begin{cases} A:2 \rightarrow B:(1,1) & (\text{حالت } 1) \\ A:3 \rightarrow B:(1,2),(2,1) & (\text{حالت } 2) \\ A:4 \rightarrow B:(1,3),(3,1),(2,2) & (\text{حالت } 3) \\ A:5 \rightarrow B:(1,4),(4,1),(2,3),(3,2) & (\text{حالت } 4) \\ A:6 \rightarrow B:(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3) & (\text{حالت } 5) \end{cases}$$

$$\Rightarrow n(A) = 5+4+3+2+1 = 15 \Rightarrow P(A) = \frac{15}{216}$$

۴۳ ۱ ۲ **۳** ۴

A پیشامد حالات مطلوب است.

سه عدد x و y و z تشکیل تصاعد عددی می دهند پس: $2y = x + z$ پس $x + z$ باید زوج باشد یعنی x و y هر دو یا فرد باشند یا هر دو زوج باشند.

$$\Rightarrow n(A) = \binom{8}{2} + \binom{7}{2}$$

$$P(A) = \frac{\binom{7}{2} + \binom{8}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{21 + 28}{5\times 7\times 13} = \frac{7}{65}$$

۴۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

A پیشامد حالات مطلوب است.

ابتدا سه تاس را انتخاب می کنیم به $\binom{6}{3}$ حالت، چون قرار است ارقام ۳ تاس برابر باشند ۶ حالت برای سه تاس وجود دارد. می ماند ۳ تاس دیگر که چون قرار است متمایز باشند $5\times 4\times 3$ حالت دارند بنابراین:

$$P(A) = \frac{\binom{6}{3}\times 6\times(5\times 4\times 3)}{6^6} = \frac{25}{162}$$

۴۵ ۱ ۲ **۳** ۴

$$S = \{\underbrace{1,2,\cdots,9}_{\text{یکرقمی} \Leftarrow \text{ضریب } 1}, \underbrace{10,11,\cdots,99}_{\text{دورقمی} \Leftarrow \text{ضریب } 2}, \underbrace{100,101,\cdots,999}_{\text{سەرقمی} \Leftarrow \text{ضریب } 3}\}$$

$$\Rightarrow P = \frac{90(2)}{9(1) + 90(2) + 900(3)} = \frac{20}{321}$$

۴۶) (۱) (۲) **(۳)** (۴) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با تعداد حالت‌های چیدن ۹ کتاب کنار هم که برابر با !۹ است.

اگر پیشامد مورد نظر را A بنامیم آنگاه A' پیشامد اینکه کتاب‌های با موضوع یکسان کنار هم باشند است.

$$P(A) = ۱ - P(A')$$

برای این امر کلیه‌ی کتاب‌های فیزیک و ریاضی و شیمی را هر کدام یک دسته فرض می‌کنیم که !۳ حالت دارند:

خود دسته‌های فرض شده نیز جابه‌جایی دارند که برای ریاضی !۳، برای فیزیک !۲ و برای شیمی !۴ حالت داریم. بنابراین:

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{۳!۳!۲!۴!}{۹!} = \frac{۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۴ \times ۳ \times ۲}{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = \frac{۱}{۲۱۰}$$

$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱}{۲۱۰} = \frac{۲۰۹}{۲۱۰}$$

۴۷) (۱) (۲) (۳) **(۴)** با استفاده از فرمول احتمال؛ داریم:

$$\underset{\text{فضای مطلوب}}{P(A)} = \frac{\overset{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{n(A)}}{\underset{\text{تعداد کل حالات}}{n(S)}}$$

تعداد کل حالات که جابه‌جایی ۱۰ فرد در کنار یکدیگر است. $\Leftarrow$ فرد اول ۱۰ حالت دارد و فرد دوم ۹ حالت و به همین ترتیب داریم:

$$n(S) = ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times \cdots \times ۲ \times ۱ = ۱۰!$$

برای به‌دست آوردن حالات مطلوب داریم:

$$n(A) = \underset{\text{جابه‌جایی هر فرد با همسر خودش}}{۲^۵} \times \underset{\text{جابه‌جایی ۵ زوج}}{۵!}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۲^۵ \times ۵!}{۱۰!}$$

۴۸) (۱) (۲) **(۳)** (۴) در پرتاب ۵ سکه حالت‌های زیر ممکن است:

۱) ۵ سکه رو و ۰ سکه پشت : $۵ \times ۰ = ۰$

۲) ۴ سکه رو و ۱ سکه پشت : $۴ \times ۱ = ۴$

۳) ۳ سکه رو و ۲ سکه پشت : $۳ \times ۲ = ۶$

۴) ۲ سکه رو و ۳ سکه پشت : $۲ \times ۳ = ۶$

۵) ۱ سکه رو و ۴ سکه پشت : $۱ \times ۴ = ۴$

۶) ۰ سکه رو و ۵ سکه پشت : $۰ \times ۵ = ۰$

بنابراین تعداد سکه‌های پشت آمده ضرب در تعداد سکه‌های رو آمده یکی از اعداد صفر، ۴ یا ۶ است.

حالت‌هایی که تفاضل دو تاس برابر صفر، ۴ یا ۶ شوند مطابق جدول زیر است:

ردیف	تاس اول	تاس دوم	تفاضل
۱	۱	۱	۰
۲	۲	۲	۰
۳	۳	۳	۰
۴	۴	۴	۰
۵	۵	۵	۰
۶	۶	۶	۰
۷	۱	۵	۴
۸	۵	۱	۴
۹	۲	۶	۴
۱۰	۶	۲	۴

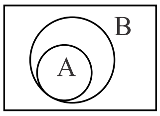
تعداد اعضای پیشامد موردنظر برابر است با:

$$\underset{\text{تعداد رو} \times \text{تعداد پشت} = ۰}{۲} \times \overset{\text{تفاضل دو تاس} = ۰}{۶} + \underset{\text{تعداد رو} \times \text{تعداد پشت} = ۴}{۲} \times \overset{\text{تفاضل دو تاس} = ۴}{۴} = ۱۲ + ۸ = ۲۰$$

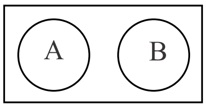
۴۹) **(۱)** (۲) (۳) (۴) $n(A \cup B)$ حداکثر مقدار ممکن است هرگاه $A \cap B = \varnothing$ باشد.

$n(A \cup B)$ حداقل مقدار ممکن است هرگاه $A \subseteq B$ باشد.

$n(A\cup B)$ حداقل $= n(B)$



$n(A\cup B)$ حداکثر $= n(A)+n(B)$



$n(A\cup B)$ تفاضل حداکثر و حداقل $= n(A)+n(B)-n(B)=n(A)$

۵۰ ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم: $\boxed{P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}\quad,\quad \binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}\quad,\quad \binom{n}{۳}=\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}}$

دو حالت داریم: یا بزرگ‌ترین عدد انتخاب شده ۳۰ است که در این صورت ۲ عدد از بین اعداد ۲۰ تا ۲۹ انتخاب می‌کنیم یا بزرگ‌ترین عدد روشده ۲۵ است که در این حالت ۲ عدد از بین اعداد ۲۰ تا ۲۴انتخاب می‌کنیم. بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۱۰}{۲}+\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۱}{۳}}=\frac{\frac{۱۰\times ۹}{۲}+\frac{۵\times ۴}{۲}}{\frac{۱۱\times ۱۰\times ۹}{۶}}=\frac{۵۵}{۱۶۵}$$

۵۱ ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم: $\boxed{\begin{array}{l}\text{تعداد جایگشت‌های } n \text{ شئ متمایز برابر است با } n! \\ P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}\end{array}}$

دو برادر $\underbrace{\text{باید کنار هم باشند یا}}_{I}$ $\underbrace{\text{یک نفر بینشان باشد یا}}_{II}$ $\underbrace{\text{۲ نفر بینشان باشد}}_{III}$

I: دو برادر را یک نفر فرض می‌کنیم و تعداد جایگشت‌های ۹ نفر را محاسبه می کنیم که برابر با !۹ است. خود دو برادر نیز به دو طریق کنار هم می‌ایستند در نتیجه جواب به صورت $۲\times ۹!$ درمی‌آید.

II: دو برادر و شخص بینشان را یک نفر در نظر می‌گیریم و تعداد جایگشت‌های ۸ نفر را محاسبه می‌کنیم که برابر با !۸ است. شخص بینشان به $\binom{۸}{۱}$ طریق می‌تواند انتخاب شود و جابه‌جایی دو برادر ۲ حالت متفاوت ایجاد می‌کند در نتیجه جواب به صورت $۸!\times ۸\times ۲$ در می آید.

III: دو برادر و ۲ شخص بینشان را یک نفر در نظر می‌گیریم و تعداد جایگشت‌های ۷ نفر را محاسبه می‌کنیم که برابر با !۷ است. دو شخص بینشان به $\binom{۸}{۲}$ طریق انتخاب می شوند و به ۲ حالت کنار هم قرار می گیرند. جابه‌جایی ۲ برادر نیز ۲ حالت متفاوت ایجاد می‌کند. در نتیجه جواب به صورت $۷!\times ۲\times ۲\times\binom{۸}{۲}$ درمی‌آید:

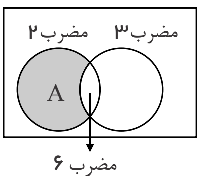
$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲\times ۹!+۱۶\times ۸!+۷\times ۴\times ۲\times ۲\times ۷!}{۱۰!}=\frac{۲\times ۹\times ۸\times ۷!+۱۶\times ۸\times ۷!+۷\times ۱۶\times ۷!}{۱۰\times ۹\times ۸\times ۷!}$$

$$=\frac{۷!(۱۶\times ۹+۱۶\times ۸+۱۶\times ۷)}{۱۰\times ۹\times ۸\times ۷!}=\frac{۱۶\times ۹+۱۶\times ۸+۱۶\times ۷}{۱۰\times ۹\times ۸}$$

$$=\frac{۱۶(۹+۸+۷)}{۵\times ۲\times ۹\times ۸}=\frac{۹+۸+۷}{۹\times ۵}=\frac{۲۴}{۴۵}=\frac{۸}{۱۵}$$

۵۲ ۱ ۲ **۳** ۴

با توجه به نمودار ون مقابل، اگر پیشامد مورد نظر را A بنامیم داریم:



$$۱\le ۲x\le ۲۰۰\Rightarrow \frac{۱}{۲}\le x\le ۱۰۰\xrightarrow{x\in\mathbb{N}} n(x)=۱۰۰$$

$$۱\le ۶x\le ۲۰۰\Rightarrow \frac{۱}{۶}\le x\le \frac{۲۰۰}{۶}\xrightarrow{x\in\mathbb{N}} n(x)=۳۳$$

$n(A)=n(\text{زوج})-n(\text{مضرب ۶})\Rightarrow n(A)=۱۰۰-۳۳=۶۷$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶۷}{۲۰۰}$$

۵۳ **۱** ۲ ۳ ۴

نکته: تعداد مربع‌ها در یک شبکهٔ $m\times n$ برابر با e است که در آن:

$$e=mn+(m-۱)(n-۱)+(m-۲)(n-۲)+\cdots$$

نکته: تعداد مستطیل‌ها در یک شبکهٔ برابر است که در آن:

$$f=\binom{m+۱}{۲}\binom{n+۱}{۲}$$

با توجه به نکات فوق داریم:

$$P(A)=\frac{۵^۲+۴^۲+۳^۲+۲^۲+۱^۲}{\binom{۶}{۲}\binom{۶}{۲}}=\frac{۵۵}{۲۲۵}=\frac{۱۱}{۴۵}$$

۵۴ ۴ ۳ ۲ ۱

A : اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۳

B : اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۵

$$|A|=[\frac{۹۹}{۳}]-[\frac{۹}{۳}]=۳۰$$

$$|B|=[\frac{۹۹}{۵}]-[\frac{۹}{۵}]=۱۸$$

$$|A\cap B|=[\frac{۹۹}{۱۵}]-[\frac{۹}{۱۵}]=۶$$

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=۳۰+۱۸-۶=۴۲$$

احتمال مطلوب برابر است:

$|S|=۹\times ۱۰=۹۰$: اعداد دورقمی

$$P(A\cup B)=\frac{|A\cup B|}{|S|}=\frac{۴۲}{۹۰}=\frac{۷}{۱۵}$$

۵۵ ۴ ۳ ۲ ۱

$$A=\{(۱,۱)(۳,۳)(۵,۵)(۳,۵)(۵,۳)(۱,۵)(۵,۱)(۳,۱)(۱,۳)\}$$

$$B=\{(۳,۳)(۵,۵)(۲,۲)(۲,۵)(۵,۲)(۳,۲)(۲,۳)(۳,۵)(۵,۳)\}$$

$$A\cap B=\{(۳,۳)(۵,۵)(۳,۵)(۵,۳)\}$$

$$\left.\begin{array}{l}P(A|B)=\frac{۴}{۹}\\ P(B|A)=\frac{۴}{۹}\end{array}\right\}\Rightarrow P(A|B)-P(B|A)=۰$$

۵۶ ۴ ۳ ۲ ۱ (A یا B) نشان‌دهندهٔ $A\cup B$ است. صورت سوال $(A\cup B)'$ می‌خواهد که با C مشترک باشد. $(A\cup B)'\cap C$ باید هاشور زده شود.

۵۷ ۴ ۳ ۲ ۱ می‌توان اثبات کرد اگر در پیشامد B و C ناسازگار باشند و رابطه $P(A|B)\leq P(A|C)$ برقرار باشد می‌توان نتیجه گرفت مقدار احتمال شرطی $P(A|B\cup C)$ بین دو مقدار $P(A|B)$ و $P(A|C)$ قرار دارد. و رابطهٔ $P(A|B)\leq P(A|B\cup C)\leq P(A|C)$ برقرار است.

۵۸ ۴ ۳ ۲ ۱ A: اعدادی که بر ۸ بخش‌پذیرند.

B: اعدادی که بر ۱۲ بخش‌پذیرند.

$A\cap B$: اعدادی که بر ۲۴ بخش‌پذیرند.

$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)=۱-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=۱-\left(\frac{[\frac{۱۰۰}{۸}]}{۱۰۰}+\frac{[\frac{۱۰۰}{۱۲}]}{۱۰۰}-\frac{[\frac{۱۰۰}{۲۴}]}{۱۰۰}\right)=۱-(\frac{۱۲}{۱۰۰}+\frac{۸}{۱۰۰}-\frac{۴}{۱۰۰})$$

$$=۱-\frac{۱۶}{۱۰۰}=\frac{۸۴}{۱۰۰}$$

۵۹ ۴ ۳ ۲ ۱ پرتاب اول ۳ بیاید، پس در پرتاب دوم و سوم باید ۱ یا ۲ بیاید. بنابراین: $\underline{۲}\times\underline{۱}=۲$

پرتاب اول ۴ بیاید، پس در پرتاب دوم و سوم باید ۱ یا ۲ یا ۳ بیاید. بنابراین: $\underline{۳}\times\underline{۲}=۶$

پرتاب اول ۵ بیاید، پس در پرتاب دوم و سوم باید ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ بیاید. بنابراین: $\underline{۴}\times\underline{۳}=۱۲$

پرتاب اول ۶ بیاید، پس در پرتاب دوم و سوم باید ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ بیاید. بنابراین: $\underline{۵}\times\underline{۴}=۲۰$

بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲+۶+۱۲+۲۰}{۶^۳}=\frac{۵}{۲۷}$$

راه‌حل دوم: ۳ عدد از ۶ عدد انتخاب می‌کنیم. عدد بزرگ‌تر را وسط قرار داده و برای دو عدد دیگر دو حالت داریم. بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲\times\binom{۶}{۳}}{۶^۳}=\frac{۴۰}{۲۱۶}=\frac{۵}{۲۷}$$

۶۰ ۴ ۳ ۲ ۱ روش اول:

A: بر ۲ بخش‌پذیر باشد. B: بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

$$P(A\cup B')=P(A'\cap B)'=P(B-A)'=۱-P(B-A)$$

$$P(B)=\frac{[\frac{۹۹}{۳}]-[\frac{۹}{۳}]}{۹۰}=\frac{۳۳-۳}{۹۰}=\frac{۳۰}{۹۰}=\frac{۱}{۳}$$

$$P(A\cap B)=\frac{[\frac{۹۹}{۶}]-[\frac{۹}{۶}]}{۹۰}=\frac{۱۶-۱}{۹۰}=\frac{۱۵}{۹۰}=\frac{۱}{۶}$$

$$۱-P(B-A)=۱-(P(B)-P(A\cap B))=۱-(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶})=\frac{۵}{۶}$$

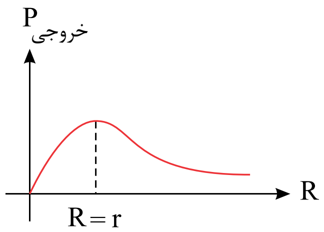
۶۱ ۱ **۲** ۳ ۴

(محیط هر حلقه × تعداد حلقه‌ها) = طول مقاومت

$$L=(۱۰۰\times ۲\pi r)\Rightarrow L=۱۰۰\times(۲\pi\times ۰٫۱)$$

$$R=\rho\frac{L}{A}=\rho\frac{L}{\frac{\pi d^۲}{۴}}\Rightarrow R=\rho\frac{L}{\frac{\pi d^۲}{۴}}R=۱٫۷\times ۱۰^{-۸}\times\frac{۲\pi\times ۰٫۱\times ۱۰۰}{\pi\times\frac{(۲\times ۱۰^{-۳})^۲}{۴}}=۰٫۳۴\Omega$$

۶۲ ۱ ۲ ۳ **۴** مطابق نمودار رسم شده توان مصرف شده در مقاومت R و یا توان مفید مولد زمانی بیشینه است که $R=r$ باشد، حال اگر با افزایش R اندازهٔ آن به r نزدیک شود، توان مفید مولد هم افزایش می‌یابد. در غیر این صورت توان مفید کاهش می‌یابد.



۶۳ ۱ **۲** ۳ ۴ نکته: بیشینه توان مفید مولد (توان خروجی) در حالتی است که $R=r$ باشد. در این‌صورت به ازای جریان $I=\frac{\varepsilon}{۲r}$ بیش‌ترین توان خروجی برابر $P_{\max}=\frac{\varepsilon^۲}{۴r}$ خواهد شد.

$$P=\varepsilon I-rI^۲\xrightarrow{I=\frac{\varepsilon}{۲r}}P_{\max}=\frac{\varepsilon^۲}{۴r}$$

$$P_{\max}=\frac{\varepsilon^۲}{۴r}\Rightarrow ۳۶=\frac{۲۴^۲}{۴r}\Rightarrow r=۴\Omega$$

حال اگر مقاومت $R=۸\Omega$ را به دو سر مولد ببندیم داریم:

$$V=IR\Rightarrow V=\frac{\varepsilon R}{R+r}=\frac{۲۴\times ۸}{۸+۴}=۱۶\ V$$

۶۴ ۱ **۲** ۳ ۴ با استفاده از رابطه‌ی $R=\rho\frac{\ell}{A}$ و $\rho=\frac{m}{V}$ داریم:

$$\begin{cases}R=\rho_{\text{مقاومت ویژه}}\frac{\ell}{A}\\ \rho_{\text{چگالی}}=\frac{m}{V}\xrightarrow{V=A\cdot L}\rho_{\text{چگالی}}=\frac{m}{A\cdot L}\Rightarrow A=\frac{m}{\rho\cdot L}\end{cases}\Rightarrow R=\rho_{\text{مقاومت ویژه}}\frac{\ell}{\frac{m}{\rho_{\text{چگالی}}\cdot\ell}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}R=\rho_{\text{مقاومت ویژه}}\frac{\rho_{\text{چگالی}}\cdot\ell^۲}{m}\\ R=\frac{V}{I}\end{cases}\Rightarrow\frac{V}{I}=\rho_{\text{مقاومت ویژه}}\frac{\rho_{\text{چگالی}}\cdot\ell^۲}{m}$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{۱٫۲}=\frac{۱٫۸\times ۱۰^{-۸}\times ۸۰۰۰\times(۲۵)^۲}{m}\Rightarrow m=۰٫۰۳۶kg\Rightarrow m=۳۶g$$

۶۵ ۱ ۲ **۳** ۴ اول) ابتدا نسبت مقاومت‌های A و B را با توجه به نمودار $(I-V)$ داده شده می‌یابیم:

$$R=\frac{V}{I}\rightarrow\frac{R_A}{R_B}=(\frac{V}{۳V})(۱)=\frac{۱}{۳}\rightarrow\frac{R_A}{R_B}=\frac{۱}{۳}\qquad(۱)$$

دوم) جرم دو سیم با هم برابر است: $\rho=\frac{m}{V}$

سیم‌ها مفتولی‌شکل هستند. (چون سطح مقطع آنها دایره است.)

$$A=\pi r^۲=\pi(\frac{d}{۲})^۲=\frac{\pi d^۲}{۴}\rightarrow\frac{A_A}{A_B}=(\frac{d_A}{d_B})^۲$$

$$\rightarrow ۶A_AL_A=۴A_BL_B\rightarrow\frac{L_B}{L_A}=\frac{۳}{۲}(\frac{A_A}{A_B})\qquad(۲)$$

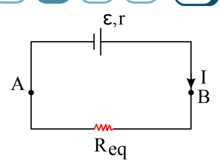
سوم) و در مورد مقاومت الکتریکی:

$$R=\rho\frac{L}{A}\rightarrow\frac{R_B}{R_A}=(\frac{\rho_B}{\rho_A})(\frac{L_B}{L_A})(\frac{A_A}{A_B})$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۳ = (۸)(\frac{۳}{۲}\frac{A_A}{A_B})(\frac{A_A}{A_B})$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۴} = (\frac{A_A}{A_B})^۲ \rightarrow (\frac{A_A}{A_B}) = \frac{۱}{۲} \rightarrow (\frac{d_A}{d_B})^۲ = \frac{۱}{۲} \rightarrow \frac{d_A}{d_B} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۶۶ ۱ **۲** ۳ ۴



$$I = \frac{\varepsilon}{r+R_{eq}} \rightarrow \varepsilon = I(r+R_{eq})$$

$$\frac{P_{خروجی}}{P_{تولیدی}} = \frac{\varepsilon I - rI^۲}{\varepsilon I} = \frac{\varepsilon - rI}{\varepsilon} = \frac{V_{AB}}{\varepsilon} = \frac{R_{eq}I}{I(r+R_{eq})} = \frac{R_{eq}}{r+R_{eq}} = \frac{۶}{۴+۶} = \frac{۶}{۱۰}$$ ۶۰ درصد

۶۷ **۱** ۲ ۳ ۴ در یک مدار تک حلقه با یک مولد الکتریکی (r و ε) و مقاومت معادل خارجی R_{eq} اگر R_{eq} باشد توان خروجی مولد بیشینه است.

ممکن است این استنباط رُخ دهد که اگر از مقدار $R = r = ۳\Omega$ به یک اندازه کاسته یا بیفزائیم توان خروجی به یک مقدار از توان خروجی بیشینه فاصله گرفته و در نتیجه:

$R_۱ = ۳ - ۱ = ۲\Omega$ و $R_۲ = ۳ + ۱ = ۴\Omega \Rightarrow P_۱ = P_۲$

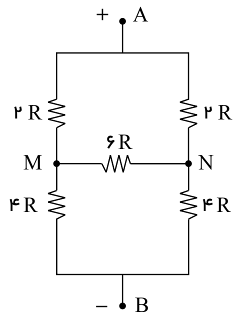
در حالی که با یک محاسبهٔ ریاضی $P_۱$ را با $P_۲$ مقایسه می‌کنیم:

$$P = \varepsilon I - rI^۲ = \varepsilon(\frac{\varepsilon}{r+R}) - r(\frac{\varepsilon}{r+R})^۲ = \frac{\varepsilon^۲}{r+R} - \frac{r\varepsilon^۲}{(r+R)^۲} = \frac{\varepsilon^۲(r+R) - r\varepsilon^۲}{(r+R)^۲}$$

$$\rightarrow P = \frac{\cancel{\varepsilon^۲} + \varepsilon^۲ R - ۲\cancel{\varepsilon^۲}}{(r+R)^۲} \Rightarrow P = \frac{R\varepsilon^۲}{(r+R)^۲} \xrightarrow{r=۳} \begin{cases} R_۱ = ۲ \rightarrow P_۱ = \frac{۲}{۲۵}\varepsilon^۲ \\ R_۲ = ۴ \rightarrow P_۲ = \frac{۴}{۴۹}\varepsilon^۲ \end{cases} \Rightarrow P_۲ > P_۱$$

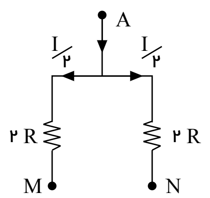
۶۸ ۱ **۲** ۳ ۴

قدم اول: مدار را به شکل زیر رسم می‌کنیم:



قدم دوم: آیا در شکل تقارن را حس می‌کنید؟

پس به سهولت در می‌یابیم که:

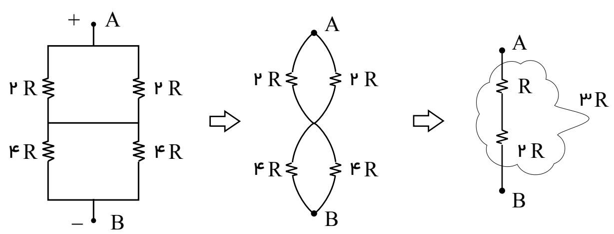


قدم سوم: ببینیم پتانسیل نقاط M و N نسبت به هم چه وضعیتی دارند:

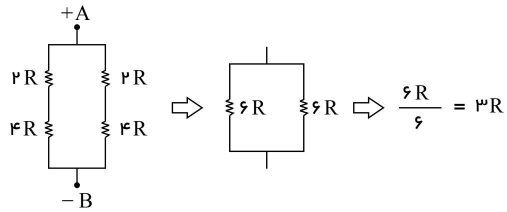
$$\begin{matrix} A \rightarrow N \;:\; V_A - ۲R \times \frac{I}{۲} = V_N \\ A \rightarrow M \;:\; V_A - ۲R \times \frac{I}{۲} = V_M \end{matrix} \Rightarrow V_M = V_N \Rightarrow V_M - V_N = V_{MN} = ۰$$

یعنی از مقاومت $۶R$ هیچ جریان الکتریکی عبور نکرده و مانند یک سیم رسانای بدون مقاومت عمل می‌کند و یا می‌توان آن‌را حذف کرد.

قدم چهارم: در نهایت ساده شدهٔ مدار:



یا



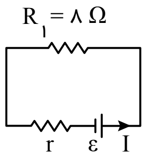
(۶۹) ۱ ۲ **۳** ۴

$P=RI^{۲}$

$$\frac{۴\cancel{P_۱}}{\cancel{P_۱}}=\frac{\cancel{R}(I+۳)^{۲}}{\cancel{R}\,I^{۲}}\Rightarrow ۴I^{۲}=(I+۳)^{۲}\Rightarrow ۲I=(I+۳)\Rightarrow ۲I-I=۳\Rightarrow I=۳A$$

(۷۰) ۱ ۲ **۳** ۴

سلول خورشیدی مانند یک باتری با نیروی محرکهٔ ε و مقاومت داخلی r می‌باشد. بنابراین می‌توانیم سلول خورشیدی را مطابق شکل زیر به‌صورت یک باتری در نظر بگیریم و داریم:



$$\left.\begin{array}{l}V=\varepsilon-rI\\ I=\dfrac{\varepsilon}{R+r}\end{array}\right\}\Rightarrow V=\varepsilon-\frac{r\varepsilon}{R+r}\Rightarrow V=\frac{R\varepsilon}{R+r}\Rightarrow ۸۰=\frac{۸\varepsilon}{۸+r}\Rightarrow ۸۰+۱۰r=\varepsilon\ \ (۱)$$

مراحل طی شده در پله‌های قبل را برای مقاومت ۱۸ اهمی تکرار می‌کنیم:

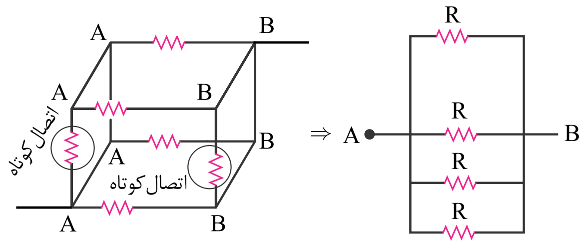
$$V=\frac{R\varepsilon}{R+r}\Rightarrow ۹۰=\frac{۱۸\varepsilon}{۱۸+r}\Rightarrow ۹۰+۵r=\varepsilon\ \ (۲)$$

حال روابط به‌دست آمده را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}۸۰+۱۰r=\varepsilon\\ ۹۰+۵r=\varepsilon\end{array}\right\}\Rightarrow ۸۰+۱۰r=۹۰+۵r\Rightarrow r=۲\Omega$$

(۷۱) ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به اینکه برخی از مقاومتها، اتصال کوتاه می‌شوند، مدار به صورت ۴ مقاومت مشابه موازی است. یعنی:



$\Rightarrow R_{eq}=\dfrac{R}{۴}$

(۷۲) ۱ ۲ ۳ **۴** به علت تقارن یعنی مساوی بودن اجزای شاخه‌های حاوی باتری، جریان $I_۲$ و $I_۱$ مساوی‌اند.

M گره : $I_۱+I_۲=I_۳\xrightarrow{I_۱=I_۲}۲I_۱=I_۳$

قاعدهٔ حلقهٔ سمت چپ : $\varepsilon_۱-r_۱I_۱-R_۳I_۳=۰$

$$\Rightarrow ۱۰-۱\times\frac{I_۳}{۲}-۲\times I_۳=۰\Rightarrow I_۳=۴A$$

(۷۳) ۱ ۲ ۳ **۴** چون سیم جایگزین هم‌جنس است پس چگالی ثابت است.

حل گام ۱ : ρ ثابت $=\dfrac{m}{V}\Rightarrow\dfrac{m_۱}{V_۱}=\dfrac{m_۲}{V_۲}\Rightarrow\dfrac{m_۲}{m_۱}=\dfrac{V_۲}{V_۱}\Rightarrow\dfrac{۰/۸\cancel{m_۱}}{\cancel{m_۱}}=\dfrac{V_۲}{V_۱}$

$$\frac{V_۲}{V_۱}=\frac{۸}{۱۰}\Rightarrow\frac{A_۲L_۲}{A_۱L_۱}=\frac{۸}{۱۰}\Rightarrow\frac{A_۲}{A_۱}=\frac{۸}{۱۰}\times\frac{L_۱}{L_۲}$$

حل گام ۲

$$R=\frac{V\text{ ثابت}}{I}\Rightarrow R\propto\frac{۱}{I}\Rightarrow\frac{R_۲}{R_۱}=\frac{I_۱}{I_۲}=\frac{\cancel{I_۱}}{۱/۲\cancel{I_۱}}$$

$$I_۲=I_۱+۲۰I_۱\qquad\Rightarrow\frac{R_۲}{R_۱}=\frac{۱۰}{۱۲}=\frac{۵}{۶}$$

حل گام ۳ $\Rightarrow R=\rho\frac{L}{A}\Rightarrow\frac{R_۲}{R_۱}=\frac{L_۲}{L_۱}\times(\frac{A_۱}{A_۲})\Rightarrow\frac{۵}{\cancel{۶}_{۳}}=\frac{L_۲}{L_۱}\times[\frac{\overset{۲}{\cancel{۱۰}}}{\underset{۴}{\cancel{۸}}}\times\frac{L_۲}{L_۱}]\Rightarrow(\frac{L_۲}{L_۱})^۲=(\frac{۲}{۳})\Rightarrow\frac{L_۲}{L_۱}=\sqrt{\frac{۲}{۳}}=\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

۷۴ ۱ ۲ ۳ **۴** اگر $\varepsilon_۲>\varepsilon_۱$ باشد آنگاه:

$$I=\frac{\varepsilon_۱-\varepsilon_۲}{R_۳+r_۱+r_۲}\Rightarrow ۲=\frac{۱۴-\varepsilon_۲}{۵+۱+۲}\Rightarrow ۱۴-\varepsilon_۲=۱۶\Rightarrow\varepsilon_۲=-۲V$$

پس قطعاً $\varepsilon_۲>\varepsilon_۱$ است و داریم:

$$I=\frac{\varepsilon_۲-\varepsilon_۱}{R_s+r_۱+r_۲}\Rightarrow ۲=\frac{\varepsilon_۲-۱۴}{۵+۱+۲}\Rightarrow\varepsilon_۲-۱۴=۱۶\Rightarrow\varepsilon_۲=۳۰V$$

منبع $\varepsilon_۱$ گیرنده است و ولتاژ دو سر آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

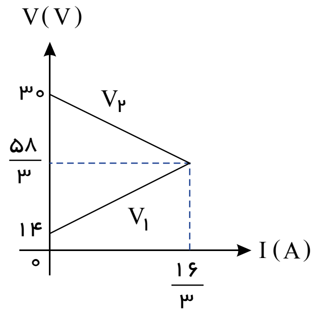
$$V_۱=\varepsilon_۱+r_۱I=۱۴+I$$

منبع $\varepsilon_۲$ محرک است و ولتاژ دو سر آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$V_۲=\varepsilon_۲+r_۲I=۳۰-۲I$$

هرچه I بیشتر شود $r_۱$ بیشتر و $r_۲$ کمتر می‌شود. حداکثر مقدار I به‌ازای $R_s=۰$ به‌دست می‌آید:

$$I_{\max}=\frac{\varepsilon_۲-\varepsilon_۱}{r_۱+r_۲}=\frac{۳۰-۱۴}{۱+۲}=\frac{۱۶}{۳}A$$
$$V_{۱\max}=\varepsilon_۱+r_۱I_{\max}=۱۴+\frac{۱۶}{۳}=\frac{۵۸}{۳}V$$
$$V_{۲\max}=\varepsilon_۲-r_۲I_{\max}=۳۰-۲\times\frac{۱۶}{۳}=\frac{۵۸}{۳}V$$



پس $V_۱$ و $V_۲$ از مقدارهای اولیه تا مقدار $\frac{۵۸}{۳}V$ تغییر می‌کند به عبارتی دیگر مقدار $V_۱$ از این مقدار بیشتر و مقدار $V_۲$ از این مقدار کمتر می‌شود.

۷۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$R_۱=\rho\frac{l_۱}{A}$$

$$l_۲=\frac{l_۱}{n}\Rightarrow R_۲=\frac{\rho l_۲}{A}=\frac{\rho l_۱}{nA}\rightarrow R_۲=\frac{۱}{n}R_۱$$

وقتی n مقاومت $R_۲$، موازی بسته شوند، مقاومت معادل آن R_{eq} از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{۱}{R_{eq}}=\underbrace{\frac{۱}{R_۲}+\frac{۱}{R_۲}+\cdots+\frac{۱}{R_۲}}_{n}=\frac{n}{R_۲}\Rightarrow R_{eq}=\frac{R_۲}{n}$$

$$\frac{R_{eq}}{R_۱}=\frac{\frac{\rho l_۱}{n^۲A}}{\frac{\rho l_۱}{A}}=\frac{\frac{۱}{n^۲R_۱}}{R_۱}=\frac{۱}{n^۲}$$

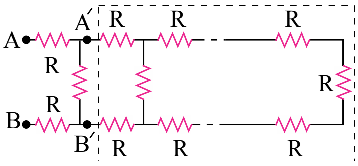
۷۶ ۱ **۲** ۳ ۴

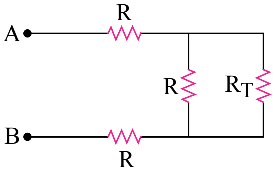
با نصف شدن ولتاژ دو سر لامپ (نسبت به ولتاژ اسمی)، توان مصرفی‌اش، $\frac{۱}{۴}$ توان اسمی‌اش می‌شود، یعنی:

$$P=\frac{V^۲}{R}\xrightarrow{R_۱=R_۲}\frac{P_۲}{P_۱}=(\frac{V_۲}{V_۱})^۲\Rightarrow\frac{P_۲}{P_۱}=(\frac{۱۱۰}{۲۲۰})^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow P_۲=\frac{۱}{۴}P_۱\xrightarrow{P_۱=۲۰۰W}P_۲=\frac{۱}{۴}\times ۲۰۰=۵۰W=۰{,}۰۵kW$$
$$U=P\times t\Rightarrow U=۰{,}۰۵\times(۴\times ۳۰)=۶kW$$

هزینه‌های مصرفی : $۶\times ۵۰۰=۳۰۰۰$ ریال $=۳۰۰$ تومان

۷۷ ۱ **۲** ۳ ۴ به علت تعداد زیاد مقاومت‌ها، مقاومت معادل بین A و B و A' و B' یکسان است.





$$R_{A'B'}=R_{AB}=R_T$$

$$R_{AB}=R+\frac{RR_T}{R+R_T}+R$$

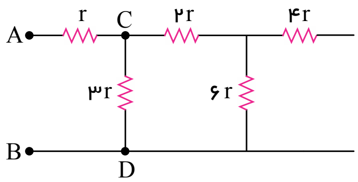
$$\Rightarrow R_T=\frac{۲R(R+R_T)+RR_T}{R+R_T}\Rightarrow R_T^۲+RR_T=۳RR_T+۲R^۲$$

$$\Rightarrow R_T^۲-۲RR_T-۲R^۲=۰$$

$$\Rightarrow R_T=\frac{۲R\pm\sqrt{(۲R)^۲-۴(۱)(-۲R^۲)}}{۲}=\frac{۲R\pm ۲R\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow R_T=(۱+\sqrt{۳})R$$

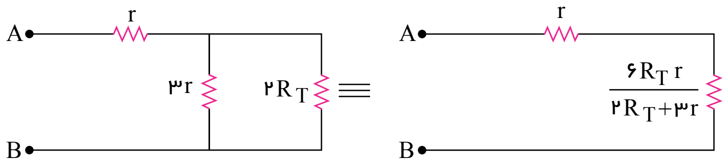
۷۸ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر مقاومت معادل بین A و B، R_{eq} باشد، مقاومت معادل بین C و D به علت دو برابر شدن تمام مقاومت‌های آن $۲R_{eq}$ خواهد بود.



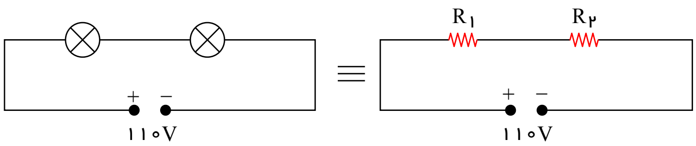
$$R_T=r+\frac{۶R_Tr}{۲R_T+۳r}\Rightarrow ۲R_T^۲+۳rR_T=۲rR_T+۳r^۲+۶rR_T$$

$$\Rightarrow ۲R_T^۲-۵rR_T-۳r^۲=۰$$

$$\Rightarrow ۲(R_T-۳r)(R_T+\frac{r}{۲})=۰\Rightarrow R_T=۳r$$



۷۹ ۱ ۲ ۳ ۴

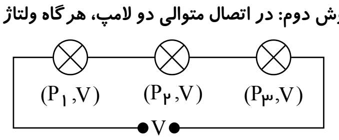


$$R_۱=\frac{۱۱۰^۲}{۱۲۰}\text{ و } R_۲=\frac{۱۱۰^۲}{۸۰}\Rightarrow R_{eq}=R_۱+R_۲=۱۱۰^۲(\frac{۱}{۱۲۰}+\frac{۱}{۸۰})=۱۱۰^۲(\frac{۲۰۰}{۸۰\times ۱۲۰})$$

$$P_T=\frac{V^۲}{R_{eq}}=\frac{۱۱۰^۲}{۱۱۰^۲(\frac{۲۰۰}{۸۰\times۱۲۰})}=\frac{۸۰\times ۱۲۰}{۲۰۰}=\frac{۹۶}{۲}=۴۸W$$

$$U=P_T\times\Delta t=۴۸W\times ۲۰h=۰{,}۰۴۸\times ۲۰(kW\cdot h)=۰{,}۹۶(kW\cdot h)$$

روش دوم: در اتصال متوالی دو لامپ، هرگاه ولتاژ اسمی هر لامپ با ولتاژ کل برابر باشد، توان مصرفی برابر است با:



$$\Rightarrow\frac{۱}{P_T}=\frac{۱}{P_۱}+\frac{۱}{P_۲}\Rightarrow\frac{۱}{P_T}=\frac{۱}{۱۲۰}+\frac{۱}{۸۰}\Rightarrow P_T=۴۸W=۰{,}۰۴۸kW$$

$$\Rightarrow U=P_Tt=۰{,}۰۴۸kW\times ۲۰h=۰{,}۹۶kW\cdot h$$

۸۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ولت‌سنج آرمانی ۵ ولت را نشان می‌دهد، بنابراین طبق رابطهٔ $I=\frac{V}{R}$ جریان گذرنده از مقاومت ۱ اهمی، $۵(A)$ است. حال دو حالت رخ می‌دهد:

حالت اول: جریان مقاومت R به سمت بالا باشد، در این صورت طبق قانون گره جریان شاخهٔ OB، ۷ آمپر و به سمت راست خواهد بود.

$V_A - ۲۰ - ۰/۵ \times ۲ + ۱۲ - ۱ \times ۷ = V_B \Rightarrow V_A - V_B = +۱۶ \ (\text{ولت})$

حالت دوم: جریان مقاومت R به سمت پایین باشد، در این صورت طبق قاعدهٔ انشعاب جریان شاخهٔ OB $۳(A)$ و به سمت چپ خواهد بود.

$V_A - ۲۰ - ۰/۵ \times ۲ + ۱۲ + ۳ = V_B$

$V_A - V_B = +۶ \ (\text{ولت})$

۸۱) ۴ ۳ **۲** ۱ الف) نادرست – زیرا دمای یک جسم برخلاف انرژی گرمایی آن به مقدار جسم بستگی ندارد.

ب) نادرست – زیرا دما صورتی از انرژی نیست.

پ) نادرست – زیرا یک ویژگی مشترک همهٔ مواد حتی مواد جامد وجود جنبش‌های نامنظم ذره‌های سازندهٔ آنها در دمای معین است.

۸۲) ۴ ۳ ۲ **۱** الف) نادرست – زیرا یک ویژگی مشترک همهٔ مواد وجود جنبش‌های نامنظم ذره‌های سازندهٔ آن‌ها در دمای معین است.

پ) نادرست – زیرا هرچند ظرفیت گرمایی ویژهٔ آب از اتانول بیشتر است اما ظرفیت گرمایی یک مول آب کم‌تر از ظرفیت گرمایی یک مول اتانول است.

ت) نادرست – زیرا مجموع انرژی‌های جنبشی ذره‌های سازندهٔ یک ماده هم‌ارز با انرژی گرمایی آن است.

۸۳) ۴ ۳ ۲ **۱** آنتالپی تبخیر $N_۲H_۴(l)$ برابر $+۴۵$ کیلوژول بر مول است. پس می‌توان نوشت:

$N_۲H_۴(l) \rightarrow N_۲H_۴(g) \ , \ \ \Delta H = +۴۵ kJ \cdot mol^{-۱}$

آنتالپی $N_۲H_۴(g)$ برابر $+۹۵/۵$ کیلوژول بر مول گزارش شده است. پس برای واکنش فوق می‌توان نوشت:

$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{آنتالپی فرآورده ها}] - [\text{آنتالپی واکنش دهنده ها}] \Rightarrow +۴۵ = (+۹۵/۵) - [N_۲H_۴(l)] \Rightarrow [N_۲H_۴(l)] = +۵۰/۵ \frac{kJ}{mol}$

با دانستن آنکه آنتالپی $O_۲(g)$ و $N_۲(g)$ صفر است و با داشتن آنتالپی $N_۲H_۴(l)$ و $H_۲O(g)$ می‌توان ΔH واکنش سوختن $N_۲H_۴(l)$ را پیدا نمود:

$N_۲H_۴(l) + O_۲(g) \rightarrow N_۲(g) + ۲H_۲O(g)$

$\Delta H_{\text{سوختن}} = [۲ \times (-۲۴۲) + ۰] - [+۵۰/۵ - ۰] = -۵۳۴/۵$

بنابراین از سوختن یک مول هیدرازین مایع، $۵۳۴/۵kJ$ گرما آزاد می‌شود، ولی در صورت تست گرمای آزاد شده از سوختن $۶/۴$ گرم هیدرازین مایع خواسته شده است.

$N_۲H_۴ = (۱۴ \times ۲) + (۱ \times ۴) = ۳۲g \cdot mol^{-۱}$

$?kJ = ۶/۴g \, N_۲H_۴ \times \frac{۱\, mol}{۳۲g} \times \frac{۵۳۴/۵\, kJ}{۱mol} = ۱۰۶/۹kJ$

۸۴) ۴ **۳** ۲ ۱ ابتدا گرمای لازم برای تبدیل یخ $۰^\circ C$ به آب $۵۰^\circ C$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۰^\circ C_{\text{یخ}} \xrightarrow{Q_۱} ۰^\circ C_{\text{آب}} \xrightarrow{Q_۲} ۵۰^\circ C_{\text{آب}} \\ Q_۱ = ۳gH_۲O \times \frac{۱mol}{۱۸g} \times \frac{۶kJ}{۱mol} = ۱kJ \\ Q_۲ = mc_{\text{آب}}\Delta\theta = ۳g \times ۴J \cdot g^{-۱} \cdot {}^\circ C^{-۱} \times ۵۰^\circ C = ۶۰۰\ J = ۰/۶\ kJ \end{array}\right\} \begin{array}{l} Q_{\text{کل}} = Q_۱ + Q_۲ = ۱ + ۰/۶ \\ = ۱/۶kJ \end{array}$$

به ازای واکنش $۰/۱۲g$ منیزیم، $۱/۶$ کیلوژول گرما آزاد شده است. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{گرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{گرما}}{|\Delta H|} \rightarrow \frac{۰/۱۲g\, Mg}{۱ \times ۲۴} \times \frac{۱/۶\, kJ}{|\Delta H|} \rightarrow |\Delta H| = ۳۲۰kJ \xrightarrow{\Delta H<۰} \Delta H = -۳۲۰\, kJ$$

۸۵) ۴ **۳** ۲ ۱ در مورد واکنش اول می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{گرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{گرما}}{|\Delta H|} \Rightarrow \frac{۸/۱g\, HCN}{۲ \times ۲۷} = \frac{Q}{|-۲۲۰۸|} \Rightarrow Q = ۳۳۱/۲kJ$$

و برای واکنش دوم خواهیم داشت:

$$\frac{\text{گرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{گرما}}{|\Delta H|} \Rightarrow \frac{xgH_۲}{۳ \times ۲} = \frac{۳۳۱/۲kJ}{|+۹۲|} \Rightarrow x = ۲۱/۶g\, H_۲ \ \ \text{مقدار نظری}$$

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۷۵ = \frac{x}{۲۱/۶gH_۲} \times ۱۰۰ \Rightarrow x = ۱۶/۲\, gH_۲ \ \ \text{مقدار عملی}$$

۸۶) ۴ ۳ **۲** ۱ الف و پ گرماده هستند.

الف) گرماده – زیرا پیوند شکسته شده $H - Br$ ضعیف‌تر از پیوند تشکیل شده $H - H$ است.

ب) گرماگیر – زیرا پیوند شکسته شدهٔ $H - F$ قوی‌تر از پیوند تشکیل شدهٔ $H - I$ است.

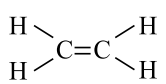
پ) گرماده – زیرا پیوند شکسته شدهٔ $H - Cl$ ضعیف‌تر از پیوند تشکیل شدهٔ $H - F$ است.

ت) گرماگیر – زیرا پیوند شکسته شدهٔ $H - H$ قوی‌تر از پیوند تشکیل شدهٔ $H - Cl$ است.

۸۷) ۴ ۳ **۲** ۱ واکنش (I) – برای شکستن ۴ مول پیوند $(C - H)$ به $۱۶۴۸kJ$ انرژی نیاز است. بنابراین:

$\Delta H_{C-H} = \frac{۱۶۴۸}{۴} = ۴۱۲kJ \cdot mol^{-۱}$

واکنش (II) – برای شکستن ۴ مول پیوند $C - H$ و یک مول پیوند $C = C$ به $۲۲۶۰kJ$ انرژی نیاز داریم. باتوجه به واکنش (I) برای شکستن ۴ مول پیوند $C - H$ باید $۱۶۴۸kJ$ انرژی مصرف شود میانگین انرژی پیوند $C = C$ برابر است با:



$\Delta H_{C=C} = ۲۲۶۰ - ۱۶۴۸ = ۶۱۲kJ \cdot mol^{-۱}$

واکنش (III) – برای شکستن ۲ مول پیوند $C - H$ و یک مول پیوند $C \equiv C$ در مجموع به $۱۶۶۱kJ$ انرژی نیاز است. باتوجه به این که برای شکستن ۲ مول پیوند $C - H$ باید

$۸۲۴kJ = ۴۱۲ \times ۲$ انرژی مصرف شود میانگین انرژی پیوند $C \equiv C$ برابر است با:

$$H - C \equiv C - H \quad \Delta H_{C \equiv C} = ۱۶۶۱ - ۸۲۴ = ۸۳۷kJ \cdot mol^{-۱}$$

به این ترتیب تفاوت میانگین آنتالپی پیوند $C \equiv C$ و $C = C$ برابر است:

$$\Delta H_{C \equiv C} - \Delta H_{C=C} = ۸۳۷ - ۶۱۲ = ۲۲۵kJ \cdot mol^{-۱}$$

(۸۸) ۴ ۳ **۲** ۱ موارد پ و ت نادرست است.

بررسی موارد نادرست:

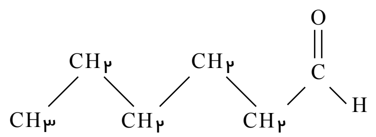
مورد پ) نادرست – زیرا ترکیب‌های آلی موجود در ادویه‌ها در ساختار خود افزون بر اتم‌های کربن و هیدروژن و اتم‌های اکسیژن گاهی نیتروژن و گوگرد نیز دارند.

مورد ت) نادرست – گروه عاملی به مولکول آلی دارای آن، خواص فیزیکی و شیمیایی منحصر به فردی می‌بخشد.

(۸۹) ۴ ۳ ۲ **۱** **الف) نادرست** – زیرا ترکیب (a) یک استر است. گروه عاملی اتری به صورت $C - O - C$ است و در آن اتم‌های کربن مجاور به کربن یا هیدروژن متصل هستند.

پ) نادرست – زیرا مادهٔ (c) نمونه‌ای از ترکیب موجود در گشنیز است.

ت) نادرست – فرمول مولکولی ترکیب (d) به صورت $C_۶H_{۱۲}O$ است.



(۹۰) **۴** ۳ ۲ ۱ ابتدا گرمای داده شده به آب و تبدیل آن به بخار آب را محاسبه می‌کنیم:

$$۵۰^\circ C \text{ آب} \xrightarrow{Q_۱} ۱۰۰^\circ C \text{ آب} \xrightarrow{Q_۲} ۱۰۰^\circ C \text{ بخار آب}$$

$$Q_۱ = mc\Delta\theta = ۱۶۰ \times ۴/۲ \times (۱۰۰ - ۵۰) = ۳۳۶۰۰J = ۳۳/۶kJ$$

$$Q_۲ = n\Delta H_{\text{تبخیر}} = \frac{۱۶۰}{۱۸}mol \times ۴۱/۲۲ = ۳۶۶/۴kJ$$

$$\rightarrow Q_{\text{کل}} = Q_۱ + Q_۲ = ۳۳/۶ + ۳۶۶/۴ = ۴۰۰kJ$$

حال جرم مولی فرمول ترکیب آلی اکسیژن‌دار را بدست می‌آوریم و در گزینه‌ها امتحان می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} ۱۲g \quad (\text{ترکیب مورد نظر}) \sim ۴۰۰kJ & \rightarrow x = ۶۰g \\ xg \quad (\text{ترکیب مورد نظر}) \sim ۲۰۰۰kJ & \text{جرم مولی } C_۳H_۷OH \end{array}$$

(۹۱) ۴ **۳** ۲ ۱ فرمول مولکولی متان $CH_۴$ و اتان $C_۲H_۶$ است و اختلاف آنها در یک $CH_۲$ است. پس به ازای هر $CH_۲$ آنتالپی سوختن به اندازهٔ $۶۷۰ = ۸۹۰ - ۱۵۶۰$ کیلوژول منفی‌تر می‌شود.

فرمول مولکولی $C_۶H_{۱۴}$ (هگزان) در مقایسه با $C_۲H_۶$ چهار $CH_۲$ بیشتر دارد. پس:

$$\Delta H_{\text{سوختن } C_۶H_{۱۴}} = [-۱۵۶۰ - ۴(۶۷۰)] = -۴۲۴۰ \, kJ \cdot mol^{-۱}$$

(۹۲) ۴ ۳ ۲ **۱** با فرض آنکه مخلوط مورد نظر شامل x مول متان و y مول گاز اتان باشد. $(x + y = ۵)$ و باتوجه به ΔH های داده شده که برحسب $kJ \cdot mol^{-۱}$ هستند x و y را محاسبه و بعد جرم $CH_۴$ و $C_۲H_۶$ را بدست می‌آوریم و در پایان درصد جرمی $CH_۴$ را بدست می‌آوریم. یعنی:

$$\text{مقدار گرمای آزاد شده مربوط به } CH_۴ = x \, mol \, CH_۴ \times \frac{۸۸۰kJ}{۱mol \, CH_۴} = ۸۸۰x \, kJ$$

$$\text{مقدار گرمای آزاد شده مربوط به } C_۲H_۶ = y \, mol \, C_۲H_۶ \times \frac{۱۵۶۰kJ}{۱mol \, C_۲H_۶} = ۱۵۶۰y \, kJ$$

مقدار گرمای آزاد شده مربوط به $C_۲H_۶$ + مقدار گرمای آزاد شده مربوط به $CH_۴$ = مقدار گرمای آزاد شده از مخلوط

$$۷۱۲۰ = ۸۸۰x + ۱۵۶۰y \rightarrow ۷۱۲۰ = ۸۸۰x + ۱۵۶۰(۵ - x) \begin{cases} x = ۱mol \, CH_۴ \\ y = ۴mol \, C_۲H_۶ \end{cases}$$

$$?gCH_۴ = ۱ \, mol \, CH_۴ \times \frac{۱۶g}{۱mol} = ۱۶g \, CH_۴$$

$$?g \, C_۲H_۶ = ۴mol \, C_۲H_۶ \times \frac{۳۰g}{۱mol} = ۱۲۰g \, C_۲H_۶$$

$$\text{درصد جرمی متان} = \frac{\text{جرم متان}}{\text{جرم کل مخلوط}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۶g}{(۱۶ + ۱۲۰)g} \times ۱۰۰ = ۱۱/۷۶\%$$

(۹۳) ۴ **۳** ۲ ۱ تعداد مول‌های متان را x در نظر می‌گیریم، بنابراین تعداد مول‌های اتان برابر $x - ۰/۶$ خواهد بود.

$$x \times (-۸۹۰) + (۰/۶ - x) \times (-۱۵۶۰) = -۸۰۲ \Rightarrow x = ۰/۲molCH_۴$$

$$\Rightarrow ۰/۶ - ۰/۲ = ۰/۴molC_۲H_۶ \Rightarrow \frac{\text{شمار مول‌های اتان}}{\text{شمار مول‌های متان}} = \frac{۰/۴}{۰/۲} = ۲$$

(۹۴) **۴** ۳ ۲ ۱

$$\frac{۱۰mol}{۱mol} = \frac{xkJ}{۲۲۸kJ} \Rightarrow x = ۲۲۸۰kJ \xrightarrow{\text{تبدیل به ژول}} ۲۲۸ \times ۱۰^۴J$$

$$q = m \cdot c \cdot \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{q}{m \cdot c} \Rightarrow \frac{۲۲۸ \times ۱۰^{۴} (J)}{۱۰/۱۸ \times ۱۰^{۳} (g) \times ۴/۲ \frac{J}{g \cdot ^\circ C}} = ۵۳/۳$$ افزایش دما در پنج دقیقه

$$\frac{۵۳/۳}{۵} = ۱۰/۸۶$$ میانگین افزایش دما در یک دقیقه

۹۵ ۴ ۳ **۲** ۱ بررسی موارد:

مورد الف) نادرست است. فرمول مولکولی دارچین $C_۹H_۸O$ با جرم مولی ۱۳۲ گرم و فرمول مولکولی بادام $C_۷H_۶O$ با جرم مولی ۱۰۶ گرم است. بنابراین اختلاف جرم مولی این دو ماده برابر ۲۶ است.

مورد ب) نادرست است. نسبت تعداد اتم هیدروژن در مولکول مادهٔ آلی دارچین ($C_۹H_۸O$) به تعداد اتم کربن در مادهٔ آلی بادام ($C_۷H_۶O$) برابر $\frac{۸}{۷} = ۱/۱۴$ است.

مورد ج) نادرست است:

بادام : $\% \frac{w}{w} C_{(C_۷H_۶O)} = \frac{۷ \times ۱۲}{۱۰۶} \times ۱۰۰ = ۷۹/۲\%$

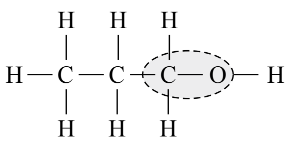
دارچین : $\% \frac{w}{w} C_{(C_۹H_۸O)} = \frac{۹ \times ۱۲}{۱۳۲} \times ۱۰۰ = ۸۱/۸\%$

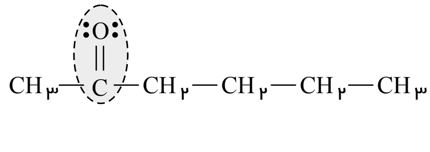
مورد د) درست است. ترکیب‌های آلی موجود در طعم دارچین و بادام، دارای گروه عاملی آلدهیدی ($-\overset{O}{\overset{\|}{C}} - H$) هستند.

۹۶ ۴ **۳** ۲ ۱ بررسی موارد:

مورد الف: درست.

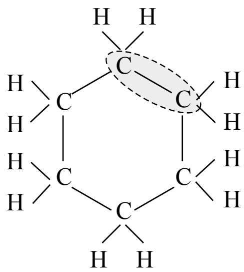
$$\underbrace{\Delta H(C = O)}_{\text{پیوند دوگانه}} > \Delta H(C - O)$$


۱- پروپانول


۲- هگزانون

مورد ب: درست.

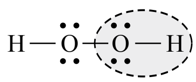
$$\underbrace{\Delta H(C \equiv C)}_{\text{پیوند سه‌گانه}} > \Delta H(C - C)$$

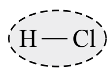



اتین

مورد پ: درست. اکسیژن خاصیت نافلزی بیشتری دارد و پیوند قوی‌تری برقرار می‌کند.

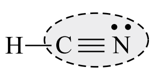
$$\Delta H(H - Cl) < \Delta H(H - O)$$

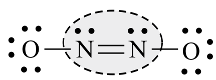



هیدروژن کلرید

مورد ت: نادرست.

$$\underbrace{\Delta H(C \equiv N)}_{\text{پیوند سه‌گانه}} > \Delta H(N = N)$$





۹۷ ۴ **۳** ۲ ۱ ابتدا محاسبه می‌کنیم که برای بالا بردن دمای $۳/۵۸kg$ آب به میزان $۲۰^\circ C$ به چند کیلوژول گرما نیاز است. سپس باتوجه به ارزش سوختی کربوهیدرات‌ها، چربی و پروتئین و نیز درصد هرکدام در لوبیای قرمز، محاسبه می‌کنیم که به چند گرم لوبیای قرمز نیاز داریم.

$$m_{\text{آب}} = ۳/۵۸kg \times \frac{۱۰۰۰g}{۱kg} = ۳۵۸۰g$$

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta = ۳۵۸۰ \times ۴/۲ \times ۲۰ = ۳۰۰۷۲۰\ J \times \frac{۱kJ}{۱۰۰۰J} = ۳۰۰/۷۲kJ$$

$$۳۰۰/۷۲kJ = (mg \times \frac{۶۲g}{۱۰۰g} \times \frac{۱۷kJ}{۱g}) + (mg \times \frac{۲۲g}{۱۰۰g} \times \frac{۱۷kJ}{۱g}) + (mg \times \frac{۲g}{۱۰۰g} \times \frac{۳۸kJ}{۱g})$$

$$۳۰۰٫۷۲ = ۱۰٫۵۴m + ۳٫۷۴m + ۰٫۷۶m \to ۳۰۰٫۷۲ = ۱۵٫۰۴m \to m = \frac{۳۰۰٫۷۲}{۱۵٫۰۴} \simeq ۲۰g$$

نکته: توجه داشته باشید که ۳۰۰٫۷۲ کیلوژول، انرژی حاصل از سوختن m گرم لوبیا به‌دست می‌آید که شامل ۶۲ درصد کربوهیدرات و ۲۲ درصد پروتئین و ۲ درصد چربی می‌باشد. (بقیهٔ لوبیا آب است که ارزش سوختی ندارد) یعنی:

کل گرمای تولید شده از سوخت و ساز لوبیا = (جرم لوبیا × درصد کربوهیدرات × ارزش سوختی آن) + (جرم لوبیا × درصد پروتئین × ارزش سوختی آن) + (جرم لوبیا × درصد چربی × ارزش سوختی آن)

۹۸ (۴) (۳) (۲) **(۱)**

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = (\text{مجموع آنتالپی پیوندها در واکنش‌دهنده‌ها}) - (\text{مجموع آنتالپی پیوندها در فراورده‌ها})$$

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = (۴\Delta H_{H-Cl} + ۱\Delta H_{O=O}) - (۴\Delta H_{O-H} + ۲\Delta H_{Cl-Cl})$$

$$-۱۱۹ = [(۴ \times ۴۳۱) + ۴۹۵] - [(۴ \times ۴۶۳) + (۲\Delta H_{(Cl-Cl)})] \Rightarrow -۱۱۹ = ۲۲۱۹ - ۱۸۵۲ - ۲\Delta H_{Cl-Cl} \Rightarrow ۲\Delta H_{Cl-Cl} = ۴۸۶$$

$$\Delta H_{Cl-Cl} = \frac{۴۸۶}{۲} \Rightarrow \Delta H_{Cl-Cl} = ۲۴۳kJ \cdot mol^{-۱}$$

روش ۱: استوکیومتری

$$Cl - Cl(g) \to ۲Cl(g)$$

$$?kJ = ۱۷٫۷۵\ \cancel{gCl_۲} \times \frac{۱\cancel{molCl_۲}}{۷۱\ \cancel{gCl_۲}} \times \frac{۲۴۳kJ}{۱\cancel{molCl_۲}} = ۶۰٫۷۵kJ$$

روش ۲: تناسب

$$۱\overset{\text{گرم}\times}{Cl - Cl} + \overset{kJ\times}{\Delta H} \to ۲Cl(g)$$

$$\frac{۱ \times ۷۱g}{۱۷٫۷۵} = \frac{۲۴۳kJ}{x} \Rightarrow x = \frac{۱۷٫۷۵ \times ۲۴۳}{۷۱} = ۶۰٫۷۵kJ$$

۹۹ **(۴)** (۳) (۲) (۱)

$$C_{۱۰}H_{۱۴}O + ۱۳O_۲ \to ۱۰CO_۲ + ۷H_۲O$$

$$?LO_۲ = ۷٫۵g\ C_{۱۰}H_{۱۴}O \times \frac{۱mol\ C_{۱۰}H_{۱۴}O}{۱۵۰g\ C_{۱۰}H_{۱۴}O} \times \frac{۱۳mol\ O_۲}{۱mol\ C_{۱۰}H_{۱۴}O} \times \frac{۲۲٫۴L\ O_۲}{۱molO_۲} = ۱۴٫۵۶L\ O_۲$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) نادرست، فرمول مولکولی ترکیب (I) $C_{۱۰}H_{۱۴}O$ و فرمول مولکولی ترکیب (II) $C_{۱۰}H_{۱۶}O$ است.

تفاوت جرم مولی دو ترکیب به اندازه جرم ۲ مول H یعنی برابر ۲ است.

۲) ترکیب (II) یک پیوند دوگانه کربن ــ کربن دارد؛ بنابراین هر مول آن با یک مول برم به‌طور کامل واکنش می‌دهد.

$$?g\ Br_۲ = ۳٫۸g\ C_{۱۰}H_{۱۶}O \times \frac{۱mol\ C_{۱۰}H_{۱۶}O}{۱۵۲g\ C_{۱۰}H_{۱۶۰}O} \times \frac{۱mol\ Br_۲}{۱mol\ C_{۱۰}H_{۱۶}O} \times \frac{۱۶g\ Br_۲}{۱mol\ Br_۲} = ۴gBr_۲$$

۳) نادرست، دو ترکیب همپار نیستند، زیرا فرمول مولکولی متفاوت دارند.

۱۰۰ **(۴)** (۳) (۲) (۱)

ارزش سوختی هر ماده، انرژی حاصل از سوختن یک گرم از آن ماده است $(kJ \cdot g^{-۱})$.

$$?g\ C_۶H_۶ = ۰٫۰۲mol\ C_۶H_۶ \times \frac{۷۸g\ C_۶H_۶}{۱mol\ C_۶H_۶} = ۱٫۵۶g\ C_۶H_۶$$

$$?g\ C_۲H_۵OH = ۰٫۱mol\ C_۲H_۵OH \times \frac{۴۶g\ C_۲H_۵OH}{۱mol\ C_۲H_۵OH} = ۴٫۶g\ C_۲H_۵OH$$

$$\frac{۱٫۵۶g}{۶۴kJ} = \frac{۱g}{x\ kJ} \Rightarrow x = ۴۱٫۰۲kJ$$

$$\frac{۴٫۶g}{۱۳۸kJ} = \frac{۱g}{y\ kJ} \Rightarrow y = ۳۰kJ$$

$$\frac{x}{y} = \frac{۴۱٫۰۲}{۳۰} \simeq ۱٫۳۷$$

$$۲C_۶H_۶ + ۱۵O_۲ \to ۱۲CO_۲ + ۶H_۲O$$

$$\frac{۰٫۰۲mol\ C_۶H_۶}{۲mol\ C_۶H_۶} = \frac{z\ mol\ CO_۲}{۱۲mol\ CO_۲} \Rightarrow z = ۰٫۱۲mol\ CO_۲$$